



Cartas de control para procesos con variables multinomiales

Luz Marcela Restrepo Tamayo

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística - Maestría en Estadística
Medellín, Colombia
2013

Cartas de control para procesos con variables multinomiales

Luz Marcela Restrepo Tamayo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Estadística

Director(a):
Ph.D Juan Carlos Correa Morales

Línea de Investigación:
Estadística Industrial
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística - Maestría en Estadística
Medellín, Colombia
2013

Resumen

Considerando que la ocurrencia de productos (o servicios) no conformes genera sobrecostos de producción principalmente por reprocesos y pérdida de rendimiento, surge como solución la utilización de cartas de control para controlar y monitorear el comportamiento de las características críticas de calidad en el tiempo, mediante el análisis de causas asignables de variación. Las cartas de control tradicionales para conteos, asociadas con el control de unidades no conformes, están fundamentadas en la distribución binomial y la distribución Poisson, sin embargo, en la práctica se encuentran regularmente procesos en los que se requiere monitorear la clasificación de los productos en una de varias categorías de interés. De esta manera, en esta tesis se proponen tres (3) cartas de control para procesos con variables multinomiales basadas en el valor-p resultado de la prueba de homogeneidad de proporciones, empleando la transformación chi cuadrado para variables uniformes y la aproximación Wilson – Hilferty para variables chi cuadrado. Las propuestas son analizadas vía simulación, mostrando mejor desempeño la carta de control multinomial usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado.

Palabras clave: Carta de Control, Distribución Multinomial, Prueba de Homogeneidad, Valor-p.

Abstract

Whereas the occurrence of products (or services) generated nonconforming production overruns mainly rework and loss of performance, the solution is the use of control charts to control and monitor the behavior of the critical features of quality over time, by analysis of assignable causes of variation. The traditional control charts for attributes, associated with the control of nonconforming units, are based on the binomial distribution and the Poisson distribution, however, is common to find processes that are required to monitor the classification of products in one of several categories of interest. Thus, in this thesis we propose three (3) control charts for processes with multinomial variables based on the p-value resulting from the homogeneity test of proportions using chi square transformation and approximation uniform variables Wilson - Hilferty for variables chi square. The proposals are analyzed via simulation, showing better performance multinomial control chart using Wilson-Hilferty approximation for chi-square variables.

Keywords: Control Chart, Multinomial Distribution, Homogeneity Test, P-value.

Contenido

Resumen	IV
1. Introducción	2
2. Generalidades de control de calidad	4
2.1. Generalidades del control estadístico de procesos	6
2.2. Cartas de control	9
2.2.1. Cartas de control para variables continuas	9
2.2.2. Cartas de control para variables discretas	13
2.3. Distribución multinomial	18
2.3.1. Intervalos de confianza para la estimación de parámetros de la distribución multinomial	21
2.3.2. Tamaños muestrales para proporciones multinomiales	22
3. Cartas de control para procesos con variables multinomiales	25
3.1. Comentarios sobre el valor-p	27
3.2. Propuesta 1: Carta de control multinomial usando valor-p	29
3.3. Propuesta 2: Carta de control multinomial usando transformación chi cuadrado del valor-p	31
3.4. Propuesta 3: Carta de control multinomial usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado	32
3.4.1. Curvas de operación para cartas de control propuestas	33
3.5. Extensiones a las cartas de control propuestas	36
3.5.1. Cartas de control multinomial y marginales binomiales	36
3.5.2. Carta de control auxiliar con muestras agrupadas	39
4. Análisis de propuestas	43
4.1. Simulaciones asumiendo proceso bajo control	43
4.2. Simulaciones asumiendo proceso fuera de control	45
5. Aplicación en un proceso de producción	52
6. Conclusiones y recomendaciones	54
6.1. Conclusiones	54

6.2. Recomendaciones	55
A. Anexo: Código en R para las simulaciones de las cartas de control propuestas bajo control	56
B. Anexo: Código en R para las simulaciones de las cartas de control propuestas fuera de control	59
C. Anexo: Código en R para elaborar curvas de operación	64
Bibliografía	67

1. Introducción

Los procesos de producción y administrativos deben contar con mecanismos de monitoreo y control que permitan identificar cambios para tomar acciones correctivas, preventivas y de mejora, de tal manera que se minimicen los costos por reprocesos, reparaciones y devoluciones, garantizando competitividad y productividad en las organizaciones (Juran y Gryna, 1988). Bajo esta premisa, Shewhart con el concepto de cartas de control y Deming con la filosofía de administración total de la calidad, dieron inicio al desarrollo e implementación masivos de herramientas enmarcadas en filosofías de mejoramiento continuo, y hoy son familiares términos como Control Total de Calidad, Mantenimiento Productivo Total, o Lean Six Sigma (Montgomery, 2005).

Las cartas de control hacen parte de un conjunto de herramientas llamado Control Estadístico de Procesos (CEP), que permite, bajo el esquema de control de calidad, garantizar productos adecuados para el uso mediante el análisis de la variación del proceso que los genera (Juran y Gryna, 1988). Las más comunes son las cartas de control de Shewhart debido a su creador, basadas en la distribución normal, sin embargo se han diseñado cartas de control para un extenso tipo de variables, empleando además transformaciones y aproximaciones, se han hecho múltiples implementaciones y se ha evidenciado su utilidad de manera ampliada para variables continuas. Para variables discretas no se tiene el mismo panorama, pues éstas no brindan tanta información como las cartas de control para variables continuas (Montgomery, 2005).

De manera particular, se ha evidenciado la necesidad de tener herramientas que faciliten monitorear procesos cuya calidad está determinada por la presencia o ausencia de varias características no medibles, donde cada elemento (producto o servicio) es susceptible de ser clasificado en una de varias categorías. Partiendo de las bondades de las cartas de control, cuando se tienen dos categorías es posible utilizar cartas de control basadas en la distribución binomial o en la distribución Poisson (Ryan, 2000), pero cuando se tienen más de dos categorías es necesaria una carta de control para datos multinomiales, ya que en la mayoría de los casos se omite el control por no encontrar práctico utilizar una carta de control para cada una de las categorías.

Con base en lo anterior, el objetivo de esta tesis es desarrollar alternativas para monitorear procesos con variables multinomiales mediante cartas de control, teniendo en cuenta que para

esta distribución se requieren tamaños de muestra muy grandes y por lo tanto sólo aplicarán para procesos de carácter masivo con volúmenes altos de producción. Estas propuestas están basadas en el valor-p resultado de la prueba de homogeneidad de proporciones para datos multinomiales y se analiza su desempeño con base en la sensibilidad para detectar cambios estudiado bajo simulación.

El capítulo 2 presenta el concepto de calidad enmarcado en filosofías de mejoramiento continuo, y una revisión del Control Estadístico de Procesos, incluyendo cartas de control para variables continuas y variables discretas. Finalmente, como el propósito es desarrollar cartas de control para procesos con variables multinomiales, se presenta la formulación de esta distribución, los procedimientos más comunes para la estimación de sus proporciones y las propuestas para calcular el tamaño de muestra.

El capítulo 3 presenta las cartas de control propuestas para procesos con variables multinomiales usando valor-p, usando transformación chi cuadrado del valor-p (Hogg y Craig, 1995) y usando transformación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado (Wilson y Hilferty, 1931). Se presentan además dos extensiones a las cartas de control propuestas.

El capítulo 4 contiene el análisis de las cartas de control propuestas vía simulación, estudiando el comportamiento del número de rechazos y del número de muestras hasta que ocurre el primer rechazo para procesos bajo control y fuera de control. A modo de ilustración, el capítulo 5 presenta la aplicación de la carta de control multinomial usando aproximación Wilson-Hilferty y cartas de control marginales binomiales para analizar un proceso de producción en un período de tiempo definido.

Finalmente, el capítulo 6 presenta las conclusiones y recomendaciones de los diferentes elementos desarrollados.

2. Generalidades de control de calidad

De manera práctica, la productividad se ve afectada por la presencia de no conformidades, desperdicios y reprocesos, debido a que se requieren recursos adicionales para producir las mismas unidades (Gaither, 2000), así que es de interés analizar el comportamiento de los procesos en el tiempo para evitar la ocurrencia de esos eventos indeseables, garantizando las características de operación, funcionalidad y apariencia.

De acuerdo a lo anterior, Juran y Gryna (1988) indican que la Calidad “consiste en aquellas características del producto que responden a las necesidades de los clientes y así proporcionan satisfacción con el producto”, o simplemente “consiste en la ausencia de deficiencias”. Por su parte, Gutiérrez y De la Vara (2004) definen calidad como “el juicio que el cliente tiene sobre un producto o servicio, resultado del grado con el cual el conjunto de características inherentes al producto cumplen con requerimientos”, e indica que los factores críticos para satisfacer las necesidades del cliente son la calidad del producto, la calidad del servicio y el precio. Y de manera consecuente, Carot (1998) menciona que a falta de calidad, hay menor productividad y baja competitividad para las empresas, lo que se podría ver reflejado en el incremento de precios de los productos para que sean adquiridos por los consumidores, de tal modo que la calidad debe estar enmarcada en una estructura que permita gestionarla, componiéndose de tres momentos: planeación, control y mejoramiento, lo que Juran y Gryna (1988) llamaron Trilogía de la Calidad.

Bajo la manera como se entiende el control de calidad, sus inicios fueron en 1798 cuando Eli Whitney desarrolló su fábrica basada en la noción de partes intercambiables (Thompson y Koronacki, 2002), concibiendo la idea de ensamblar partes estandarizadas simplificando la operación y disminuyendo la oportunidad de error. En 1875, después de analizar la manera de operación de los empleados, Frederick Taylor postuló los principios de la “Administración científica”, que sugiere que la división de las tareas permite hacer el trabajo más fácil y rápido, con el propósito de aumentar la productividad (Montgomery, 2005). Estos principios se aplicaron de manera rigurosa en la Ford Motor Company a principios del siglo XX, obteniendo diseño de productos estandarizado, producción en masa, bajos costos de manufactura, líneas de ensamble mecanizadas y especialización de la mano de obra (Gaither, 2000). Así que dada la necesidad de tener procesos estandarizados, Shewhart introdujo las cartas de control en 1920 como una de las 7 herramientas del Control Estadístico de Procesos, que sirvieron como elemento para que Edward Deming estructurara la filosofía Total Quality

Management (TQM), divulgada y aplicada en 1950 en la industria japonesa (Deming, 1989), estructurada bajo la premisa de mejoramiento continuo cuyo eje central son las personas de la organización (Neave, 1987). Uno de los conceptos necesarios en la mejora continua es el ciclo PHVA (Planear, Hacer, Verificar, Actuar), que consiste en mirar sistemáticamente los cambios, de tal manera que lo primero que se debe hacer es planear el cambio, luego ejecutarlo, verificar los resultados y finalmente actuar para normalizar el cambio o para comenzar el ciclo de mejoramiento con nueva información (Walton, 1992). Hackman y Wageman (1995) presentan detalladamente la conceptualización de TQM incluyendo algunos planteamientos prácticos, y se puede ampliar información en Hillmer y Karney (1995).

Una vez observados los resultados de la implementación de herramientas de mejoramiento continuo en Japón, Estados Unidos adoptó varias de ellas, entre las que se puede mencionar Kaizen (mejoramiento continuo del proceso de producción orientado a la reducción de desperdicios), Kanban (se produce justo lo que el proceso requiere, disminuyendo inventario en proceso), TQC (control total de calidad, que invita a los trabajadores a tomar decisiones sobre la producción ante la ocurrencia de una no conformidad) y JIT (justo a tiempo: requiere utilizar un sistema de manufactura donde la etapa final de producción define el flujo de los procesos precedentes, disminuyendo el almacenamiento de materias primas) (Young, 1992). Y en busca de mejores prácticas y procedimientos Dooley, Anderson y Liu (1999) plantean la necesidad de un proceso de conocimiento de las bases de la calidad (PQKB), que requiere la consignación de los datos tomados de los procesos en un sistema de información computacional, con el propósito de hacer análisis diversos y complementarios a las variables que se tienen en las bases de datos.

Para garantizar que los productos o servicios están adecuados para el uso, es necesario identificar tanto características como defectos a monitorear. Las características provienen de las especificaciones y los defectos de las constataciones de fallos durante la fabricación y el uso, así que es necesario definir un sistema que permita clasificarlos de alguna manera según su importancia o criticidad, así que Juran y Gryna (1988) sugieren la intervención de un equipo interdisciplinario que defina el número de niveles o estratos, que aunque puede tomar cualquier valor, por experiencia se sugiere tres o cuatro categorías. Este equipo debe además definir cada una de ellas y asignar cada defecto y característica dentro de esas clases.

Una vez se tienen identificadas las características de calidad y se hace un registro de las ocurrencias, se hace necesario encontrar un índice común que exprese la posibilidad de defectos haciendo posible establecer comparaciones con comportamientos pasados, con otras líneas de producción e incluso con competidores, con el propósito de identificar si la calidad ha mejorado o empeorado (Juran y Gryna, 1988). En los casos en los que el procedimiento de clasificación es subjetivo porque lo hace un humano y no un equipo de medición, aumentando la posibilidad de cometer errores, Tsekouras, et al. (2002) proponen varias aproximaciones

para clasificar parámetros de calidad basado en la teoría lógica difusa, donde las variables de calidad se deducen de otras variables de proceso medidas con precisión.

2.1. Generalidades del control estadístico de procesos

En el marco del control de calidad, el Control Estadístico de Procesos (CEP) se define como “la aplicación de técnicas estadísticas para medir y analizar la variación de los procesos” (Juran y Gryna, 1988), o como “un conjunto poderoso de herramientas para resolver problemas, muy útil para conseguir la estabilidad y mejorar la capacidad del mismo proceso mediante la reducción de la variabilidad” (Montgomery, 2005). Stapenhurst (2005) lo define como “el uso de herramientas y técnicas de base estadística principalmente para la gestión y mejora de los procesos”. Para Thompson y Koronacki (2002), CEP se reduce a tres pasos:

1. Diagramas de flujo del proceso de producción.
2. Muestreo aleatorio y medición en intervalos regulares de tiempo en numerosas etapas del proceso de producción.
3. Uso de fallas Pareto para descubrir en ese muestreo, mediante análisis retrospectivo, las causas que deberían ser retiradas.

Para analizar un proceso, es posible partir de la recolección de muestras del mismo. “Si la distribución es la misma cada vez que se toma una muestra, se obtienen resultados predecibles con una variación mínima centrada en un valor objetivo”, lo que permite estimar comportamientos futuros y planear con base en ellos, pero esto no siempre ocurre, así que cuando se toman medidas repetidamente desde un proceso, puede ocurrir cualquiera de las dos siguientes situaciones (Stapenhurst, 2005):

- Si la distribución de los datos es siempre la misma en cada conjunto de mediciones, se obtienen resultados predecibles y se dice que el proceso está *bajo control estadístico* y opera solamente bajo causas comunes de variación.
- Si la distribución cambia con cada conjunto de mediciones, se dice que el proceso está *fuera de control estadístico*, sujeto a causas comunes y especiales de variación.

Las ventajas de tener un proceso bajo control estadístico, entre otras, es que el proceso tiene una capacidad medible y comunicable, los costos son predecibles, hay regularidad en la producción y los efectos de los cambios que se realicen sobre el sistema se puede medir con mayor rapidez y fiabilidad (Deming, 1989). Una manera de visualizar el comportamiento de la variabilidad de un proceso es mediante una carta de control (Gutiérrez y De la Vara, 2004), donde “la clave es identificar qué cambió en el momento en el que ocurrió la condición de fuera de control y tomar acciones apropiadas”, con el propósito de estabilizar el proceso

(Stapenhurst, 2005).

Se define una carta de control como “la representación gráfica de una característica de calidad que se ha medido o calculado a partir de una muestra contra el número de muestra o tiempo” (Montgomery, 2005), o como “una secuencia temporal con líneas de decisión agregadas” (Ryan, 2000), de tal manera que la variabilidad de una característica de calidad puede ser analizada con base en la salida del proceso estimando los parámetros de su distribución estadística (Juran y Gryna, 1988). Vea también Carot (1998), Duncan (1989), Farnum (1997), Gutiérrez y De la Vara (2004), Levinson (2011), Ott et al. (2000), Pérez (1999) y Stapenhurst (2005).

En general, una carta de control está constituida por una línea central que representa el valor promedio de la característica de calidad de interés y por dos límites de control, que basados en la variación estadística del proceso pueden ser determinados como la media más o menos 3 desviaciones estándar del parámetro, así que si el estimador del parámetro a ser estudiado está distribuido normalmente, bajo aproximación del Teorema del Límite Central para el estadístico cartado, alrededor de 99.73 % de todos los valores se ubicarán dentro de los límites de control (Juran y Gryna, 1988).

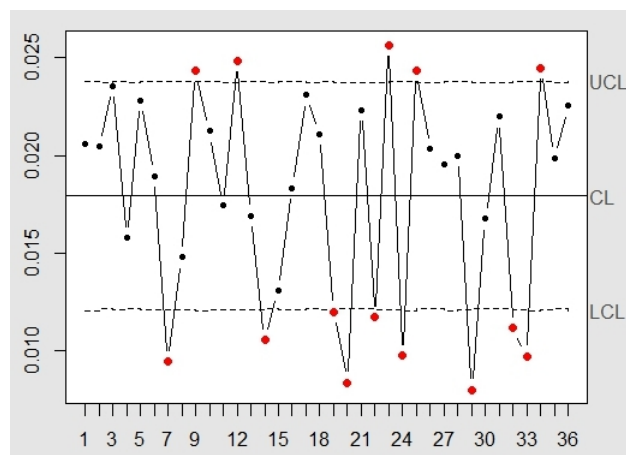
Con base en el principio anterior, se tiene la siguiente formulación para el modelo general de una carta de control (Gutiérrez y De la Vara, 2004), donde μ_w y σ_w representan el promedio y la desviación estándar respectivamente de la característica W que se está analizando y k es la “distancia de los límites de control a partir de la línea central, expresada en términos de desviaciones estándar”:

$$LCS = \mu_w + k\sigma_w \quad (2-1)$$

$$LCI = \mu_w - k\sigma_w \quad (2-2)$$

$$LC = \mu_w \quad (2-3)$$

donde LCS (UCL) significa Límite de Control Superior, LCI (LCL) significa Límite de Control Inferior y LC (CL) significa Línea Central. Las cartas de control basadas en esta formulación son llamadas *Cartas de Control Shewhart* (Figura 2-1). Montgomery (2005) indica que elegir los límites de control es equivalente a establecer la región crítica para realizar la prueba de hipótesis de que el parámetro que se está midiendo tiene un valor promedio especificado, así que una carta de control prueba esa hipótesis repetidamente en diferentes puntos del tiempo. “Si en un gráfico de control un punto se sitúa fuera de los límites de control, se rechaza la hipótesis nula de estabilidad del proceso y, por tanto, se acepta que el parámetro poblacional correspondiente se ha modificado” (Carot, 1998).

Figura 2-1.: *Ejemplo de carta de control*

Los límites de control de las ecuaciones (2-1) y (2-2) indican el rango de variación de la característica de calidad W , “de forma que cuando el proceso está en control estadístico, haya una alta probabilidad de que prácticamente todos los valores de W caigan dentro de los límites” (Gutiérrez y De la Vara, 2004). Desplazamientos o cambios en el nivel del proceso, tendencias en el nivel del proceso, o ciclos recurrentes, son algunas reglas de identificación de comportamientos no aleatorios en las cartas de control, como indicadoras de que el proceso está operando bajo causas asignables de variación (Gutiérrez y De la Vara, 2004). Otros patrones de comportamiento no aleatorio pueden ser consultados en Montgomery (2005), incluyendo los definidos por Western Electric. Estos patrones se asocian generalmente, cuando se trata de procesos de producción, a cambios en el personal, en el material, en la configuración de la maquinaria o la herramienta, o a cambios en factores ambientales (Juran y Gryna, 1988).

Para la implementación de la carta de control es necesario definir el tamaño de la muestra y la frecuencia de muestreo, escogidos de tal manera que se puedan identificar cambios en el proceso considerando subgrupos racionales que provengan de la misma distribución (Ryan, 2000), el cual está definido como “una muestra aleatoria de toda la producción del proceso sobre el intervalo de muestreo” (Montgomery, 2005). La utilización de muestras grandes con mucha frecuencia permitirá detectar cambios en el proceso de manera más rápida, sin embargo esto implica mayor esfuerzo para realizar el muestreo, así que la persona encargada del estudio, deberá decidir si usar tamaños de muestra pequeños en intervalos de tiempo pequeños, o tamaños de muestra más grandes en intervalos de tiempo largos, pero estas decisiones se basan incluso en mediciones previas de variabilidad. Los pasos para la creación de cartas de control pueden ser consultados en Juran y Gryna (1988).

Dada la caracterización de la variable de interés, existen dos tipos generales de cartas de control: para variables y para atributos, que pueden ser univariadas o multivariadas. Las cartas de control univariadas para variables se aplican a características de calidad de tipo continuo, esto es, que se miden en una escala numérica (\bar{X}, R, S, X) . Las cartas de control univariadas para atributos se aplican a características de calidad de tipo discreto, esto es, requieren solamente un conteo asociado con la ocurrencia de un evento particular (p, np, c, u) (Gutiérrez y De la Vara, 2004). Stapenhurst (2005) presenta de manera gráfica cómo seleccionar la carta de control apropiada según el tipo de variable que se pretende estudiar.

Considerando el desarrollo histórico de las cartas de control, su utilización ha sido masiva en manufactura e industria, sin embargo se ha visto su aplicabilidad en otros ambientes, motivando su utilización en áreas donde se desea identificar en qué momento se empieza a rechazar una hipótesis de interés que no necesariamente está relacionada con la calidad de un producto. Charnes y Gitlow (1995) utilizaron cartas de control $\bar{X} - R$ para demostrar la presencia de soborno a jugadores en Jai Alai en uno de los torneos en Florida, McAree (1996) empleó cartas de control p para identificar posibles zonas de riesgo de trabajo mediante el análisis de los exámenes de espirometría de trabajadores de Wright-Patterson, Umut Sargut (2003) presentó la utilización de las herramientas de CEP a métricas de un software corporativo, utilizando de manera intensiva cartas de control individuales, Park (2005) diseñó una carta de control de medias de lotes modificada (MBM) y la aplicó a cierto tipo de datos de tráfico para detectar más rápido de lo normal una intrusión en la red, con el propósito de proteger las redes informáticas y los sistemas de información, y Huschka (2009) examinó el uso de una carta c sobre una distribución mixta para controlar la rotación de inventario, por mencionar algunos ejemplos.

2.2. Cartas de control

2.2.1. Cartas de control para variables continuas

En la Tabla 2-1 se encuentra la formulación típica de las cartas de control univariadas para variables más comunes bajo el cumplimiento de los supuestos de normalidad (Ryan, 2000, cap. 4 - 5).

Para analizar variables continuas, es necesario monitorear simultáneamente el promedio y la variabilidad (Montgomery, 2005). De la Tabla 2-1, las cartas de control asociadas con el promedio son \bar{X} , X y el Promedio móvil, y las asociadas con la variabilidad son R , S y s^2 , de tal manera que se suele acompañar una carta \bar{X} con una carta R o una carta s . Para controlar un proceso se recomienda garantizar inicialmente que la variabilidad del mismo esté bajo control alrededor de un valor antes de proceder a construir la carta de control de

Tabla 2-1.: Formulación típica de cartas de control para variables continuas

Carta de control	LC	LCS	LCI	Observaciones
\bar{X} : Promedios	\bar{x}	$\bar{x} + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
X : Individual	\bar{x}	$\bar{x} + 3 \frac{MR}{d_2}$	$\bar{x} - 3 \frac{MR}{d_2}$	$MR = x_i - x_{i-1} $
Promedio móvil	\bar{x}	$\bar{x} + \frac{3}{\sqrt{n}} \frac{MR}{d_2}$	$\bar{x} - \frac{3}{\sqrt{n}} \frac{MR}{d_2}$	d_2 tabulado
R : Rango	\bar{R}	$D_4 \bar{R}$	$D_3 \bar{R}$	D_3 y D_4 tabulados
S : Desviación	\bar{s}	$B_4 \bar{s}$	$B_3 \bar{s}$	B_3 y B_4 tabulados
s^2 : Varianza	\bar{s}^2	$\bar{s}^2 \frac{\chi_{.999}}{n-1}$	$\bar{s}^2 \frac{\chi_{.001}}{n-1}$	

medias, ya que si esto no sucede, no se tiene una distribución estable de medidas alrededor de una media (Ryan, 2000). En Caulcutt (1995) se encuentra el procedimiento estándar para elaborar cartas de control $\bar{X} - R$.

La carta de medianas es una alternativa a la carta \bar{X} . Es fácil hacer los cálculos respectivos y no necesariamente tiene que ser usada en conjunto con la carta R , sin embargo es poco eficiente para identificar condiciones fuera de control (Stapenhurst, 2005). La carta R con límites de probabilidad permite corregir la asimetría de la distribución del rango, aunque si la distribución es simétrica, no debería existir una diferencia grande entre los límites de control de probabilidad y los límites 3-sigma (Montgomery, 2005), (Ryan, 2000).

La carta de control de la Diferencia, propuesta por Grubbs en 1946, compara un lote de referencia producido bajo condiciones de estabilidad, con un lote del proceso en curso, con el propósito de “separar la inestabilidad del proceso causada por factores incontrolables de la inestabilidad del proceso generada por causas asignables”. Cada punto graficado en la carta representa la diferencia entre el promedio del subgrupo del lote de referencia \bar{x}_r y el promedio del subgrupo del lote del proceso en curso \bar{x}_c (Ryan, 2000). La carta de control Z se puede usar en vez de la carta de la diferencia cuando la variabilidad no es constante, donde el valor graficado es la conversión de los datos a una distribución normal con desviación estándar de 1 (Stapenhurst, 2005).

Xie, Goh y Ranjan (2002) proponen una carta de control para controlar el tiempo entre fallas, que regularmente se asume que se distribuye de manera exponencial y que puede ser un procedimiento para monitorear la confiabilidad.

La habilidad de las cartas \bar{x} y R para detectar cambios en el proceso se describe por sus curvas de operación característica (OC). Juran y Gryna (1988) definen el concepto como “la gráfica del valor real de un parámetro del proceso contra la probabilidad de que una

sola muestra esté dentro de los límites de control”, y por lo tanto es función del tamaño de subgrupo, el peso de los límites de control y la desviación estándar. Montgomery (2005) indica que se trata del riesgo β o la probabilidad de no detectar cambios en el proceso, así que “para construir la curva OC de la carta \bar{x} , se grafica el riesgo β contra la magnitud del corrimiento que quiere detectarse expresado en unidades de desviación estándar para varios tamaños de la muestra n ”, donde β está definido como sigue:

$$\beta = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n}) \quad (2-4)$$

siendo Φ la distribución normal acumulada, L está asociado con la amplitud de los límites de control (usualmente $L = 3$), y k es el corrimiento en términos de desviaciones estándar que desea detectarse. Montgomery (2005) indica cómo construir la curva de operación de la carta R , aunque de manera general ésta no es sensible a los corrimientos pequeños cuando el tamaño del subgrupo es 4, 5 o 6, y cuando es mayor que 10, se sugiere usar la carta s .

A partir del concepto de curvas de operación, surge el concepto Longitud Promedio de la Corrida o ARL por sus siglas en inglés (Average Run Length), que “es el número de puntos que en promedio es necesario graficar en la carta para que ésta detecte un cambio dado” (Gutiérrez y De la Vara, 2004), y está definido como sigue (Montgomery, 2005):

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (2-5)$$

para la ARL bajo control y

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (2-6)$$

para la ARL fuera de control. Es deseable identificar rápidamente cuándo ha ocurrido un cambio en un parámetro del proceso, pero las cartas de Shewhart no tienen buenas propiedades ARL (Ryan, 2000), motivo por el cual Gutiérrez y De la Vara (2004) plantean la posibilidad de utilizar las cartas CUSUM propuesta por Page en 1954 y EWMA propuesta por Roberts en 1959, que permiten la identificación de cambios pequeños en el proceso sin la presencia ascendente proporcional de falsas alarmas.

Cuando es necesario controlar simultáneamente dos o más características de calidad relacionadas, puede ser engañoso hacerlo para cada una aisladamente, dado que la probabilidad de encontrar un punto dentro de los límites de control no es igual que en las cartas de control individuales (Montgomery, 2005). Ryan (2000) indica que, suponiendo una distribución normal multivariada, un cambio en la media, la correlación o la varianza implica un proceso fuera de control. Observe que las cartas de control univariadas tradicionales no requieren

cálculos exhaustivos y permiten identificar la presencia de una posible causa asignable de variación, pero cuando se trata de controlar variables múltiples, las soluciones para variables continuas pueden presentar dificultades en la implementación dada la formulación de las mismas (Johnson y Wichern, 2007).

Fuchs y Kenett (1998) indican que aunque se utilicen cartas de control univariadas para todas las variables relevantes, solamente se puede obtener una información parcial sobre el proceso, lo que se observa de manera más evidente cuando las variables son altamente correlacionadas. Sin embargo, los gráficos de Shewhart multivariados no son tan populares como sus homólogos univariantes, ya que presentan cierta dificultad para su cálculo y los valores calculados y graficados no están relacionados con las escalas de cualquiera de las variables monitoreadas, además estas cartas no expresan directamente cuál es la o las variables que generaron una condición fuera de control, siendo necesario profundizar en el análisis. En particular, cuando se hace seguimiento simultáneo en varias dimensiones, la identificación del estado fuera de control está sujeto a una mayor tasa de falsas alarmas que para un solo gráfico debido al efecto de comparaciones múltiples. Así que para entender las relaciones existentes entre variables de datos multivariados, se puede iniciar por analizar las relaciones por pares, para lo cual se acostumbra a utilizar un diagrama de dispersión.

De manera análoga a la carta de control \bar{X} , se desarrolló la carta de control T^2 de Hotelling para monitorear y controlar el vector de la media de un proceso con variables múltiples, considerando observaciones individuales o datos subagrupados tal como se considera en las cartas de control univariadas (Montgomery, 2005). Yáñez, González y Vargas (2011) discuten las cartas de control T^2 multivariadas y detallan su implementación en los aplicativos R y SAS.

Ryan (2000) presenta detalladamente la distribución T^2 de Hotelling, el diseño de la carta de control y la identificación de señales fuera de control incluyendo la identificación de un cambio en la estructura de correlación. Además, indica la existencia de cartas multivariadas para controlar la variabilidad que están basadas en el determinante de $|S|$ o varianza muestral generalizada, siendo $|S|^{1/2}$ el análogo multivariado de la carta de control s .

Para controlar la matriz de covarianza se puede emplear la carta G, basada en la prueba de igualdad para dos matrices de covarianza. El concepto es similar a la prueba de igualdad de desviaciones estándar de dos muestras en el contexto de la prueba t : dadas p características, tamaños de muestra n_1 y n_2 , matrices muestrales de covarianza S_1 y S_2 y matriz de covarianza agrupada S , la hipótesis nula de que $\Sigma_1 = \Sigma_2$ se prueba de acuerdo al estadístico llamado G cuyo cálculo se encuentra en Levinson (2011). Si G excede el cuantil $1 - \alpha$ del estadístico chi cuadrado con $p(p + 1)/2$ grados de libertad, se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia α .

Finalmente, “las cartas de control de suma acumulada y EWMA se desarrollaron para proporcionar mayor sensibilidad a los corrimientos pequeños en el caso de una variable, y pueden extenderse a los problemas de control estadístico de variables múltiples” (Montgomery, 2005). Bersimis et al. (2006) discuten los procedimientos básicos para implementar cartas de control multivariadas, incluyendo la descripción de métodos para interpretar señales fuera de control.

2.2.2. Cartas de control para variables discretas

Con el propósito de controlar variables discretas, se plantearon las cartas de control para conteos, que aunque no brindan tanta información como las cartas de control para variables, tienen aplicabilidad considerable en procesos de servicios (Montgomery, 2005). En la Tabla 2-2 se encuentra la formulación típica de las cartas de control univariadas para conteos más comunes, encontrada en Ryan (2000, cap. 6).

Tabla 2-2.: Formulación típica para cartas de control para variables discretas

Carta de control	LC	LCS	LCI
p : Fracción de unidades defectuosas	\bar{p}	$\bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$	$\bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$
np : Número de unidades defectuosas	$n\bar{p}$	$n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$	$n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$
c : Número de defectos	\bar{c}	$\bar{u} + 3\sqrt{\bar{c}}$	$\bar{u} - 3\sqrt{\bar{c}}$
u : Número de defectos por unidad	\bar{u}	$\bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$	$\bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$

Teniendo en cuenta que una unidad defectuosa es aquella que no cumple con una o más características, la formulación de las cartas p y np se basa en la siguiente premisa: “si se selecciona una muestra aleatoria de n unidades del producto, y D es el número de unidades del producto que son disconformes, entonces D tiene una distribución binomial con parámetros n y p ” (Montgomery, 2005). Stapenhurst (2005) sugiere que el tamaño muestral debe ser superior a 50, y la proporción media de rechazos $n\bar{p}$ debe ser mayor que 5, con el propósito de detectar cambios moderados en la media, y cuando el tamaño de las muestras no es constante, las cartas de control p o u son las que deben ser utilizadas, dada la opción de tener límites de control de anchura variable. Una aplicación interesante de la carta p es presentada por Yacout y Chang (1996), empleándola como herramienta analítica para determinar la falla de un proceso asumiendo que la falla sigue un proceso de Poisson homogéneo.

De manera alternativa, la Carta Q para datos binomiales, desarrollada por Quesenberry, propone utilizar como límites de control $LCS = 3$ y $LCI = -3$, donde el estadístico grafi-

cado es $Q_i = \Phi^{-1}(u_i)$, siendo $u_i = B(x_i; n, p)$ (Stapenhurst, 2005).

Johnson y Kotz en 1969 propusieron la transformación arco seno para la variable aleatoria x de la carta de control p o np . Otras transformaciones como la transformación angular del promedio pueden ser consultadas en Ryan (2000).

Amirzadeh, Mashinchi y Parchami (2009) plantean una carta de control para el grado medio de la inconformidad (\tilde{p}) tratando la calidad como un conjunto difuso, de tal forma que sea sensible ante cambios en la media y en la varianza del proceso, utilizando números difusos (fuzzy) trapezoidales.

Con respecto a las cartas de control c y u , que están asociadas con la cantidad de no conformidades encontradas en un lote sometido a inspección, “por lo general se supone que la distribución de Poisson es un modelo apropiado de la ocurrencia de disconformidades en muestras de tamaño constante” (Montgomery, 2005). Con base en ello, es necesario que los eventos ocurran de forma independiente el uno del otro y que la probabilidad de que ocurra un evento sea proporcional al área de oportunidad (Stapenhurst, 2005). Considerando que cada no conformidad c_i puede tener un peso diferente w_i de acuerdo a su gravedad, Dodge en 1928 propuso la carta D (Ryan, 2000), siendo D el número de no conformidades por unidad de inspección.

Aebtarm y Bouguila (2011) presentan la carta de control c tipo Shewhart y diez propuestas adicionales, planteadas por otros autores, las cuales están asociadas a transformaciones de datos, estandarización de datos y optimización de los límites de control, indicando que las transformaciones son útiles para muestras de bajo promedio, que la estandarización es más efectiva que la transformación, pero no es efectiva para muestras de bajo promedio, y que la aproximación de optimización de los límites de control es la mejor aproximación para obtener una carta que permita monitorear defectos. Si los datos para muestras grandes son transformados haciendo $Y = 2\sqrt{c}$, se obtendrá una distribución aproximadamente normal con media $2\sqrt{\lambda}$ y varianza 1, siendo λ la media de la distribución Poisson, de tal manera que los límites de control estarán dados por $\bar{y} \pm 3$ (Ryan, 2000). Otra transformación, propuesta por Anscombe en 1948, está dada por $y_1 = 2\sqrt{c + 3/8}$ con límites de control $y_1 \pm 3$.

Considerando que la distribución geométrica es muy sesgada, Quesenberry propuso en 1995 la carta de control geométrica en casos donde la probabilidad de observar una unidad no conforme es tan pequeña que es inútil utilizar un gráfico p (Ryan, 2000). Gutiérrez y García (2010) proponen una carta de control con base en la distribución geométrica con parámetro $p = 0,1$, con el propósito de monitorear la aleatoriedad de los juegos de números de d dígitos

De manera alternativa, para el monitoreo y control de la fracción defectuosa, teniendo un

tamaño muestral constante, Calabrese (1995) presenta un modelo bayesiano basado en la minimización del costo esperado que puede ser obtenido si el proceso está fuera de control con una probabilidad π y N períodos que permanecen antes de que el proceso termine f_N^π .

Lucas (1985) propone el uso de cartas CUSUM Poisson para detectar incrementos o decrementos en la tasa de conteo.

Para variables multinomiales, Marcucci (1985) propuso identificar señales fuera de control cuando las proporciones de la muestra que se está analizando difieran significativamente de las proporciones iniciales empleando el estadístico χ^2 de Pearson dado por:

$$X^2 = \sum_{i=1}^c \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad (2-7)$$

donde n_i es el número realizado en la categoría I , en una muestra de tamaño n , y p_i es la proporción base conocida de la categoría i . X^2 se distribuye aproximadamente como una distribución chi cuadrado asumiendo que el proceso está bajo control, el tamaño de muestra es mayor a 167 y las ocurrencias esperadas np_i no son demasiado pequeñas. Si α es la tasa de falsas alarmas, el límite de control superior de la carta está dado por $LCS = \chi_{(c-1, \alpha)}^2$, sin embargo no indica cuál categoría está generando la perturbación, para lo cual sugiere construir una carta de control p descartando una de las categorías, restringiendo este método solamente cuando se tienen tres categorías.

Laviolette (1995) utiliza un enfoque bayesiano que utiliza la distribución Dirichlet como distribución a priori de la distribución multinomial concentrándose en categorías no conformes, mientras que Shiau et al. (2005) se enfoca en la propoción de cada una de las categorías de la variable. Woodall, Tsui y Tucker (1997) presentan una revisión de cartas de control basadas en estadística difusa para datos categóricos, y Spanos y Chen (1997) utilizan el concepto de regresión logística para monitorear una variable multinomial en la fabricación de semiconductores.

Duran (2009) propone el llamado método p-tree que transforma el proceso multinomial en varias subetapas binarias independientes, que permite identificar la categoría que cambió y no está limitado por el número de categorías c que tiene el proceso. El método consiste en construir un árbol de probabilidades con $c - 1$ categorías y graficar las cartas de control asociadas. Suponiendo que las probabilidades base p_i son conocidas al igual que las probabilidades condicionales base f_i , con $i = 1, 2, \dots, c - 1$, los límites de control para la primera categoría están dados por:

$$LCS_1 = f_1 + Z_{(1-\alpha^*/2)} \sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n}} \quad (2-8)$$

$$LC_1 = f_1 \quad (2-9)$$

$$LCI_1 = f_1 - Z_{(1-\alpha^*/2)} \sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n}} \quad (2-10)$$

donde Z_p es la distribución normal estándar tal que la zona de la cola superior es p . Las probabilidades condicionales base se calculan como $f_i = \frac{p_i}{1-\sum_{j=1}^{i-1} p_j}$, con $i = 1, 2, \dots, c$, y así los límites de control para las $c - 1$ categorías restantes están dados por:

$$LCS_i = f_i + Z_{(1-\alpha^*/2)} \sqrt{\frac{f_i(1-f_i)}{n - \sum_{j=1}^{i-1} n_j}} \quad (2-11)$$

$$LC_i = f_i \quad (2-12)$$

$$LCI_i = f_i - Z_{(1-\alpha^*/2)} \sqrt{\frac{f_i(1-f_i)}{n - \sum_{j=1}^{i-1} n_j}} \quad (2-13)$$

Ryan et al. (2011) proponen la carta de control de suma acumulada multinomial para monitorear procesos en situaciones donde los artículos pueden ser clasificados en más de dos categorías, y Li et. al (2013) proponen el enfoque del valor-p en los casos donde el interés está centrado en la detección de saltos en la media en Fase II usando una carta de control CUSUM.

Cuando se trata de controlar varias variables discretas, Patel (1973) presenta métodos de control de calidad cuando se tienen datos que provienen de una distribución binomial o de una distribución Poisson multivariadas. Lu et al. (1998) proponen una carta de control tipo Shewhart que consiste en la extensión multivariada de las cartas np univariadas, llamada carta np multivariada MNP.

Jolayemi (1999) indica la necesidad de utilizar Cartas de Control Multiatributos (MACC) en ambientes industriales, dado que los productos están generalmente caracterizados por más de un atributo, pero la práctica común es monitorear de manera separada mediante una carta p o np cada atributo, pero este proceder no es efectivo especialmente cuando el muestreo es destructivo, así que desarrolló un modelo basado en una aproximación para la convolución de variables aleatorias binomiales independientes (Aproximación J) y una extensión de las cartas de control np . Con base en el desarrollo teórico previo, el modelo que sugiere el autor se basa en que se inspeccionarán m características de calidad que son independientes y siguen la distribución binomial, y se tiene caracterizado el estado de control con respecto a cada uno de los atributos. Las muestras de tamaño n son tomadas cada s horas desde el proceso, y todos las unidades de las muestras se inspeccionan con respecto a todos los atributos. El número total de unidades defectuosas w encontradas en la muestra con respecto a todos los atributos es el dato que se grafica en la carta de control.

Basado en el planteamiento anterior, Jolayemi (2000) desarrolló un modelo iterativo de optimización cuyo propósito es minimizar el costo total esperado por unidad de tiempo, que permite el diseño de cartas de control multiatributo cuando hay multiplicidad de causas asignables, de tal manera que arroja el tamaño muestral, el intervalo de muestreo y los límites de control basado en la aproximación J .

Taleb et al. (2006) presentan dos aproximaciones para construir cartas de control que permitan monitorear procesos con múltiples atributos cuando los datos están presentados en forma lingüística; la primera de ellas es similar al estadístico T^2 de Hotelling y está basado en valores representativos de conjuntos difusos, y la segunda es una combinación lineal de variables chi cuadrado dependientes obtenida mediante la aproximación Satterthwaite.

Chiu y Kuo (2007) construyen un gráfico de control para monitorear datos de conteo Poisson multivariados, llamada carta MP, donde los límites de control son desarrollados por un método de probabilidad exacta sobre la base de la suma de defectos o no conformidades para cada característica de calidad.

Ospina y Yáñez (2009) comparan tres métodos para construir cartas de control para variables binomiales bivariadas correlacionadas: carta T^2 de Hotelling basada en la aproximación de la distribución binomial multivariada a la distribución normal multivariada, carta MNP y la carta \mathbf{r} , la cual emplea un método no paramétrico basado en el índice de profundidad de Mahalanobis, encontrando que la carta MNP es la mejor tanto en control como fuera de control.

Skinner et al. (2006) proponen la carta de control “Deleted-Y” basada en el estimador de momentos de conteos Poisson para monitorear conteos múltiples recomendada cuando solamente cambian una o dos variables; cuando cambian todas las variables proponen usar la carta de control \bar{Y} , estadístico calculado desde la media muestral. Aebtarm y Bouguila (2010) proponen una carta de control Poisson bivariada para monitorear simultáneamente dos características correlacionadas, basada en la optimización del intervalo de confianza de Poisson bivariado buscando una tasa satisfactoria de falsas alarmas. Laungrungrong (2010) propone la carta de control EWMA multivariada para datos Poisson MPEWMA.

Taleb (2009) indica que la aplicación de las cartas de control multivariadas depende del método de muestreo usado, así que utiliza una aproximación probabilística y elementos de la teoría difusa (fuzzy) para controlar procesos con variables multinomiales. Luego de comparlas, se encuentra que ambas propuestas tienen el mismo desempeño para detectar cambios en el proceso y para detectar señales fuera de control. Considere el vector $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_r)$, donde π_i denota la probabilidad de que un producto seleccionado aleatoriamente tenga un resultado en la categoría i . Se asume que $Y = (Y_1, \dots, Y_r)$ tiene una distribución multinomial con probabilidades π . Un procedimiento estadístico estándar es usar el estadístico de prueba

de bondad de ajuste de Pearson, dado por la ecuación (2-14), donde n es el tamaño de muestra, y bajo control, $G^2 \sim \chi^2_{(\nu)}$ con ν grados de libertad.

$$G^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(Y_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} \quad (2-14)$$

Si π_i no son conocidos, un procedimiento estadístico correcto es una prueba de homogeneidad de proporciones entre el período base y cada período monitoreado, donde el estadístico a usar está dado por la ecuación (2-15), donde p_{il} y p_{0l} denotan las frecuencias esperadas en las celdas de la tabla de contingencia correspondientes a la categoría l en el período i y en el período 0 respectivamente, y n_i y n_0 denotan los tamaños de muestra en el período l y en el período 0 respectivamente.

$$X_i^2 = n_i n_0 \sum_{l=1}^r \frac{(p_{il} - p_{0l})^2}{Y_{il} + Y_{0l}} \quad (2-15)$$

Los elementos de teoría difusa utilizados en el planteamiento de las propuestas de Taleb sugieren dos casos. Para el primero, las categorías de cada descripción de calidad l no son combinadas, y los subconjuntos difusos asociados son determinados a partir de las variables categóricas originales. En el segundo caso, las categorías que representan una descripción de calidad l están asociadas con un término categórico, y se define una nueva variable categórica con r posibles términos categóricos.

Li y Tsung (2012) proponen cartas de control para múltiples variables binomiales y múltiples variables Poisson basadas en la tasa de falso descubrimiento (FDR), que se utiliza para cuantificar la proporción esperada de rechazos erróneos. Topalidou y Psarakis (2009) hacen una revisión detallada de las cartas de control propuestas multiatributo con el propósito de orientar a los investigadores sobre este tema y su aplicación de manera particular en áreas de salud o de servicios.

2.3. Distribución multinomial

Partiendo del interés puntual de desarrollar cartas de control para monitorear una variable multinomial, se presenta la definición de su distribución de probabilidad de la siguiente manera: suponga que n ensayos idénticos e independientes pueden tener resultados en cualquiera de k categorías. Sea $y_{ij} = 1$ si el ensayo i se clasifica en la categoría j y $y_{ij} = 0$ en otro caso. Entonces $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$ representa un ensayo multinomial con $\sum_j y_{ij} = 1$. Note que y_{ik} es redundante dada la dependencia lineal sobre los otros. Sea $n_j = \sum_i y_{ij}$ el número de ensayos que tienen resultado en la categoría j en un total de n ensayos (Johnson y Kotz,

1996). Sea $\pi_j = P(Y_{ij} = 1)$ la probabilidad de un resultado en la categoría j para cada ensayo, entonces la función de masa de probabilidad multinomial es:

$$p(n_1, n_2, \dots, n_k) = \left(\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \right) \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots \pi_k^{n_k} \quad (2-16)$$

con $\sum_{j=1}^k n_j = n$ y $\sum_{j=1}^k \pi_j = 1$.

Para esta distribución se tiene que:

$$E(n_i) = n\pi_i \quad (2-17)$$

$$\text{Var}(n_i) = n\pi_i(1 - \pi_i) \quad (2-18)$$

$$\text{Cov}(n_i, n_j) = -n\pi_i\pi_j \quad (2-19)$$

El estimador máximo verosímil de π_j es la proporción muestral. La prueba de hipótesis chi cuadrado de Pearson evalúa si los parámetros multinomiales igualan a ciertos valores especificados. El estadístico fue propuesto originalmente por Karl Pearson en 1900 para probar el ajuste de un modelo mediante la comparación del conjunto de frecuencias esperadas con las frecuencias observadas. Considere $H_0 : \pi_j = \pi_{j0}$, con $j = 1, \dots, c$ donde $\sum_j \pi_{j0} = 1$. Cuando H_0 es cierto, el valor esperado de n_j , llamado *frecuencia esperada*, es $\mu_j = n\pi_{j0}$ con $j = 1, \dots, c$. El estadístico propuesto es el siguiente (Agresti, 2002):

$$X^2 = \sum_j \frac{(n_j - \mu_j)^2}{\mu_j} \quad (2-20)$$

Diferencias grandes en el numerador produce valores grandes para el estadístico X^2 para n fijo. Sea que X_0^2 denote el valor observado de X^2 . El valor-p es el valor nulo de $P(X^2 \geq X_0^2)$. Para muestras grandes, X^2 tiene aproximadamente una distribución chi cuadrado con $c - 1$ grados de libertad. El valor-p es aproximado por $P(\chi_{c-1}^2 \geq X_0^2)$, donde χ_{c-1}^2 denota la variable aleatoria chi cuadrado con $c - 1$ grados de libertad.

El estadístico de prueba de razón de log-verosimilitud G^2 también puede ser utilizado ya que es asintóticamente equivalente al estadístico de prueba X^2 , y está dado como sigue:

$$G^2 = 2 \sum_j n_j \ln \left(\frac{n_j}{\mu_j} \right) \quad (2-21)$$

Cressie y Read (1989) presentan las investigaciones realizadas con respecto a la comparación de estos dos estadísticos X^2 y G^2 .

Para una muestra multinomial (n_1, \dots, n_c) de tamaño n , la distribución marginal de n_j es $\text{bin}(n, \pi_j)$. Para n grande, n_j tiene aproximadamente una distribución normal. Por el teorema del límite central, las proporciones muestrales $\hat{\boldsymbol{\pi}} = (n_1/n, \dots, n_{c-1}/n)'$ tienen aproximadamente una distribución normal multivariada. Sea $\boldsymbol{\Sigma}_0$ la matriz de covarianza nula de $\sqrt{n}\hat{\boldsymbol{\pi}}$ y sea $\boldsymbol{\pi}_0 = (\pi_{10}, \dots, \pi_{c-1,0})'$. Bajo H_0 , desde que $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{\pi}_0)$ converge a la distribución $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_0)$, la forma cuadrática

$$n(\hat{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{\pi}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{\pi}_0) \quad (2-22)$$

tiene una distribución que converge a la distribución chi cuadrado con $c-1$ grados de libertad. La matriz de covarianzas de $\sqrt{n}\hat{\boldsymbol{\pi}}$ tiene los siguientes elementos:

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} -\pi_j \pi_k & j \neq k \\ \pi_j(1 - \pi_j) & j = k \end{cases}$$

El elemento (j, k) -ésimo de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}$ es $1/\pi_{c0}$ cuando $j \neq k$ y $(1/\pi_{j0} + 1/\pi_{c0})$ cuando $j = k$ (Agresti, 2002).

Suponga que los conteos en las celdas de una tabla de contingencia (n_1, \dots, n_N) tienen una distribución multinomial con probabilidades $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N)'$. Sea $n = n_1 + \dots + n_N$ y sea $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)'$ las proporciones muestrales, donde $p_i = n_i/n$.

Sea $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{iN})$ la observación i en una tabla de contingencia, donde $Y_{ij} = 1$ si ésta cae en la celda j , y $Y_{ij} = 0$ en otro caso. Se tiene que:

$$E(\mathbf{Y}_i) = \boldsymbol{\pi} \quad (2-23)$$

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_i) = \boldsymbol{\Sigma} \quad (2-24)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{jk})$ con

$$\sigma_{jj} = \text{Var}(Y_{ij}) = E((Y_{ij}^2) - [E(Y_{ij})]^2) = \pi_j(1 - \pi_j) \quad (2-25)$$

$$\sigma_{jk} = \text{Cov}(Y_{ij}, Y_{ik}) = E(Y_{ij}Y_{ik}) - E(Y_{ij})E(Y_{ik}) = -\pi_j\pi_k \quad (2-26)$$

La matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ tiene la forma

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}' \quad (2-27)$$

donde $\text{diag}(\boldsymbol{\pi})$ es la matriz diagonal con elementos $\boldsymbol{\pi}$ en la diagonal principal. Desde que \mathbf{p} es la media muestral de n observaciones independientes, se tiene que (Agresti, 2002):

$$\text{Cov}(\mathbf{p}) = [\mathbf{diag}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}'] / n \quad (2-28)$$

El Teorema del Límite Central mutivariado implica que:

$$\sqrt{n}(\mathbf{p} - \boldsymbol{\pi}) \rightarrow N[\mathbf{0}, \mathbf{diag}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}'] \quad (2-29)$$

2.3.1. Intervalos de confianza para la estimación de parámetros de la distribución multinomial

Sea n_1, n_2, \dots, n_k las frecuencias en un tamaño de muestra n de una distribución multinomial, y sea $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ los correspondientes parámetros de la distribución.

Quesenberry y Hurts (1964) indican que el interés está dado en obtener un conjunto de intervalos S_i , con $i = 1, 2, \dots, k$ tal que

$$P \left\{ \bigcap_{i=1}^k (\pi_i \in S_i) \right\} \geq 1 - \alpha \quad (2-30)$$

para un valor específico de α . El intervalo para π_i está dado por

$$\frac{\chi_{\alpha, k-1}^2 + 2n_i \pm (\chi_{\alpha, k-1}^2 [\chi_{\alpha, k-1}^2 + 4n_i(n - n_i)/n])^{1/2}}{2(n + \chi_{\alpha, k-1}^2)} \quad (2-31)$$

Goodman (1965) identificó que es posible disminuir hasta en una tercera parte la longitud de estos intervalos reemplazando $\chi_{\alpha, k-1}^2$ por $\chi_{\alpha/k, 1}^2$, así, el intervalo para π_i está dado por:

$$\frac{\chi_{\alpha/k, 1}^2 + 2n_i \pm (\chi_{\alpha/k, 1}^2 [\chi_{\alpha/k, 1}^2 + 4n_i(n - n_i)/n])^{1/2}}{2(n + \chi_{\alpha/k, 1}^2)} \quad (2-32)$$

Considerando que la distribución multinomial es asimétrica, Sison y Glaz (1995) recomiendan utilizar la región de confianza dada por la ecuación (2-33), encontrando un c tal que $\nu(c) < 1 - \alpha < \nu(c + 1)$. Tomando $\gamma = [(1 - \alpha) - \nu(c)] / [\nu(c + 1) - \nu(c)]$:

$$\left(\hat{\pi}_i - \frac{c}{n} \leq \pi_i \leq \hat{\pi}_i + \frac{c + 2\gamma}{n} \right) \quad (2-33)$$

Tal como lo sugieren Leemis y Trivedi (1996) y González (2010), un intervalo de confianza “exacto” para π_i basado en la distribución F está dado en la ecuación (2-34), donde y_i es el número de resultados en la categoría i y k es el número de categorías:

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{n-y_i+k-1}{y_i F_{2y_i, 2(n-y_i+k-1), 1-\alpha/(2*k)}}}, \frac{1}{1 + \frac{n-y_i}{(y_i+k-1) F_{2(y_i+k-1), 2(n-y_i), \alpha/(2*k)}}} \right) \quad (2-34)$$

El método basado en el Teorema del Límite Central (Casella y Berger, 2002), está dado por la ecuación (2-35):

$$\hat{\pi}_i \pm z_{\alpha/(2k)} \sqrt{\frac{\hat{\pi}_i(1 - \hat{\pi}_i)}{n}} \quad (2-35)$$

González (2010) compara estos intervalos de confianza para la distribución multinomial, junto con otros cinco métodos, vía simulación, encontrando que el intervalo basado en la distribución F y los intervalos propuestos por Quesenberry y Hurst tienen un “excelente” desempeño con respecto al nivel de confianza real y a su longitud.

2.3.2. Tamaños muestrales para proporciones multinomiales

La elección de un tamaño de muestra para la estimación simultánea de proporciones multinomiales permiten controlar la probabilidad de que los intervalos simultáneos cubran las verdaderas proporciones, así que basado en el desarrollo de intervalos de confianza propuestos por Goodman (1965), Angers (1974) presenta un método gráfico para identificar el tamaño de muestra de una distribución multinomial y Tortora (1978) propone un procedimiento para determinar el tamaño de muestra requerido para poblaciones multinomiales, donde está dada por parte de los expertos una precisión absoluta b_i para cada elemento i con $(i = 1, 2, \dots, k)$, expresada como un porcentaje de tolerancia para cada proporción, obteniendo el siguiente resultado:

$$n = \lceil \chi_{\alpha/k, 1}^2 \pi_i (1 - \pi_i) / b_i^2 \rceil \quad (2-36)$$

donde π_i es la proporción de la población que está en la i -ésima categoría. Por lo tanto, uno debe hacer k cálculos, uno para cada par (b_i, π_i) , con $i = 1, \dots, k$, y seleccionar el n mayor obtenido como el tamaño de muestra deseado.

Thompson (1987) propone seleccionar el tamaño de muestra más pequeño para una muestra aleatoria de una distribución multinomial tal que la probabilidad sea al menos de $1 - \alpha$ que todas las proporciones estimadas simultáneamente estarán entre las distancias estimadas de las proporciones poblacionales reales d_i , esto es

$$P \left\{ \bigcap_{i=1}^k |p_i - \pi_i| \leq d_i \right\} \geq 1 - \alpha \quad (2-37)$$

donde π_i es la proporción de la i -ésima categoría en la población, p_i es la proporción observada y k es el número de categorías. El procedimiento general para seleccionar el tamaño muestral para poblaciones multinomiales estimadas con un nivel de significancia simultáneo α dado y el ancho de la mitad del intervalo especificado $d_i (i = 1, 2, \dots, k)$ es:

1. Paso 1: para cualquier valor posible del vector de parámetros, seleccione un n y calcule $\sum \alpha_i$, donde $\alpha_i = 2(1 - \Phi(z_i))$ y $z_i = d_i \sqrt{n} / \sqrt{\pi_i(1 - \pi_i)}$. Si $\sum \alpha_i < \alpha$, repita con un valor más pequeño de n , y si $\sum \alpha_i > \alpha$, repita con un valor mayor de n hasta que se encuentre el primer n que satisfaga $\sum \alpha_i \leq \alpha$
2. Paso 2: repita el primer paso con todos los posibles valores de los parámetros para determinar el vector de parámetros π_0 para el peor de los casos, el cual da el tamaño de muestra a utilizar.

Considerando los aportes que hacen Tortora (1978) y Thompson (1987), que optimizan diferentes funciones objetivo considerando un nivel de confianza simultáneo deseado, Bromaghin (1993) indica que su procedimiento, basado en intervalos de confianza propuestos por Goodman en 1965, sugiere tamaños muestrales ligeramente más pequeños que los presentados por Tortora (1978), así que dado un valor de π_i , y especificando valores para α_i y d_i , la i -ésima desigualdad es exactamente satisfecha por la siguiente ecuación:

$$n = \left(\frac{z_{1-(\alpha_i/2)}^2}{2d_i^2} \right) \left[\pi_i(1 - \pi_i) - 2d_i^2 + \sqrt{\pi_i^2(1 - \pi_i)^2 - d_i^2[4\pi_i(1 - \pi_i) - 1]} \right] \quad (2-38)$$

De acuerdo al planetamiento de Bromaghin (1993), la Tabla **2-3** muestra los tamaños de muestra sugeridos para α , k y d definidos.

Observe que de manera particular, para variables aleatorias multinomiales, a medida que aumenta el número de categorías se requiere un mayor tamaño de muestra, y esto puede restringir la aplicación de desarrollos estadísticos a procesos masivos en los cuales las unidades producidas sea lo suficientemente grande para obtener los tamaños de muestra aquí sugeridos.

Tabla 2-3.: Tamaños muestrales para distribuciones multinomiales con α , k y d dados

	α								
	0.01			0.05			0.10		
	d			d			d		
k	0.05	0.075	0.10	0.05	0.075	0.10	0.05	0.075	0.10
2	656	288	159	380	166	92	267	117	64
3	853	375	207	568	249	138	449	197	109
4	905	398	220	618	272	150	498	219	121
5	946	415	230	657	289	160	536	236	130
6	979	430	238	690	303	168	568	249	138
7	1007	442	245	717	315	174	595	261	145
8	1032	453	250	741	325	180	618	272	150
9	1053	462	256	762	335	185	639	281	155
10	1072	471	260	781	343	190	657	289	160

3. Cartas de control para procesos con variables multinomiales

Cuando interesa monitorear la calidad de un producto o un servicio que es clasificado como “Conforme”, “No conforme”, es posible utilizar una carta de control para atributos basada en la distribución binomial tal como se detalló en el capítulo anterior, pero cuando puede ser clasificado en una de varias categorías, por ejemplo “Excelente”, “Bueno”, “Regular”, “Malo”, cobra importancia implementar una carta de control para variables multinomiales.

Considere la estructura de datos multinomiales de muestras independientes de la misma variable, presentada en la Tabla **3-1**, proveniente de un proceso de donde se toman m muestras en el tiempo, de tamaño variable n_i , y se tienen definidas k categorías donde para cada muestra i , $\sum_{j=1}^k n_{ij} = n_i$.

Tabla 3-1.: Estructura de frecuencias de muestras multinomiales

	c_1	c_2	c_3	\dots	c_k
muestra 1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	\dots	n_{1k}
muestra 2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	\dots	n_{2k}
muestra 3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	\dots	n_{3k}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
muestra m	n_{m1}	n_{m2}	n_{m3}	\dots	n_{mk}

Considerando que $E(n_{ij}) = n_i \pi_j$, la tabla de proporciones estimadas estará dada como se muestra en la Tabla **3-2**, donde $\hat{\pi}_{ij} = n_{ij}/n_i$.

Tal como lo menciona Ryan (2000), las cartas de control se pueden usar para determinar si un proceso ha estado bajo control estadístico con base en datos históricos haciendo un análisis retrospectivo, procedimiento que es llamado Fase I, de tal manera que es necesario entender y mejorar el proceso usando cartas de control de manera iterativa, tal como lo expresa Woodall (2000), indicando además que en esta etapa de la implementación de control estadístico, una carta de control se parece a una herramienta de análisis exploratorio de

Tabla 3-2.: Estructura de proporciones de muestras multinomiales

	c_1	c_2	c_3	\dots	c_k
muestra 1	$\hat{\pi}_{11}$	$\hat{\pi}_{12}$	$\hat{\pi}_{13}$	\dots	$\hat{\pi}_{1k}$
muestra 2	$\hat{\pi}_{21}$	$\hat{\pi}_{22}$	$\hat{\pi}_{23}$	\dots	$\hat{\pi}_{2k}$
muestra 3	$\hat{\pi}_{31}$	$\hat{\pi}_{32}$	$\hat{\pi}_{33}$	\dots	$\hat{\pi}_{3k}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
muestra m	$\hat{\pi}_{m1}$	$\hat{\pi}_{m2}$	$\hat{\pi}_{m3}$	\dots	$\hat{\pi}_{mk}$

datos. En Fase II, “el objetivo es determinar si el proceso se ha mantenido en estado de control estadístico” (Ryan, 2000), y por lo tanto se asume que los parámetros de la distribución bajo control son conocidos, de tal manera que una carta de control se parece a una prueba de hipótesis repetida en el tiempo para detectar cambios a partir de un proceso bajo control (Woodall, 2000). Bersimis et al. (2006) amplían estos dos conceptos.

Una vez identificados los parámetros de la variable aleatoria multinomial, estando en Fase II, es de interés probar la hipótesis de homogeneidad de proporciones muestra a muestra para la tabla de frecuencias previa (Montgomery, 2005), esto es, para comparar las proporciones de la muestra i con las proporciones nominales dadas por un vector $\mathbf{v} = (\pi_{i1}^{(0)}, \pi_{i2}^{(0)}, \pi_{i3}^{(0)}, \dots, \pi_{ik}^{(0)})$, la hipótesis nula está dada en la ecuación (3-1) y la hipótesis alternativa en la ecuación (3-2). Una manera de presentar el resultado de una prueba de hipótesis es mediante el valor-p (Casella y Berger, 2001), definido como “la probabilidad de que el estadístico de la prueba asuma un valor que es al menos tan extremo como el valor observado del estadístico cuando la hipótesis nula H_0 es verdadera” (Montgomery, 2005).

$$H_0 : \pi_{i1} = \pi_{i1}^{(0)}; \pi_{i2} = \pi_{i2}^{(0)}; \pi_{i3} = \pi_{i3}^{(0)}; \dots; \pi_{ik} = \pi_{ik}^{(0)} \quad (3-1)$$

$$H_1 : \exists \left(\pi_{ij} \neq \pi_{ij}^{(0)} \right); j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (3-2)$$

Cuando un proceso con variables multinomiales está bajo estudio, es importante analizar el tamaño de muestra con respecto al número de categorías y a la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellas, ya que un número grande de categorías puede conducir a proporciones poco representativas dentro del análisis, pero puede ocurrir que una de esas categorías esté considerada como crítica y es de interés identificar el momento a partir del cual empezó a presentarse. Por lo anterior, las categorías del proceso a ser monitoreadas deben establecerse de acuerdo a su naturaleza y al tipo de análisis que se pretenda llevar a cabo; en algunas

ocasiones el analista podrá optar por agrupar categorías, mientras que en otras ocasiones será necesario monitorear de manera aislada una característica particular.

Las cartas de control presentadas en las siguientes secciones corresponden a las propuestas presentadas en esta tesis para monitorear procesos con variables multinomiales en Fase II, tema que ha sido escasamente abordado en los textos académicos, pero que ha sido investigado por Marcucci (1985), Laviolette (1995), Woodall et al. (1997), Spanos y Chen (1997), Duran (2009), Ryan et. al (2011), Taleb (2009) y Li et. al (2013), sin embargo es importante mencionar primero algunos aspectos sobre el valor-p debido a que es el concepto básico empleado en las propuestas.

3.1. Comentarios sobre el valor-p

El valor-p es una de las medidas más utilizadas como medida de incertidumbre, sin embargo los estadísticos pueden en algunos casos no estar de acuerdo sobre su uso e interpretación como una medida de prueba. Para James, et. al (1997) es una medida de evidencia contra la hipótesis nula, y su distribución bajo H_0 es uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$ sin tener en cuenta el tamaño de muestra del experimento, motivo por el cual no es posible distinguir si el valor-p proviene de un estudio con muestras grandes o pequeñas.

Según Wright (1992) el valor-p proporciona información sobre si una prueba de hipótesis estadística es significativa o no, esto es, cuanto menor sea el valor-p, más fuerte es la evidencia contra la hipótesis nula, sin embargo, el valor-p producido por una prueba estadística multivariada no es necesariamente significativo sólo porque es menor que un nivel de significancia elegido, así que propone el uso de valores-p ajustados para una hipótesis particular dentro de una colección de hipótesis, de tal manera que un valor-p ajustado puede ser comparado directamente con cualquier nivel de significancia elegido α , y si el valor-p ajustado es menor o igual que α , la hipótesis es rechazada.

Para Berger y Sellke (1987), el valor-p puede ser una medida engañosa de las pruebas aportadas por los datos en contra de la hipótesis nula, y que valores pequeños del valor-p no necesariamente indican fuerte evidencia en contra de la hipótesis nula. Por otro lado, Lang, Rothman y Cann (1998) reportan que en epidemiología, el valor-p sigue siendo usado erróneamente como una medida de la importancia y credibilidad de los resultados del estudio, pues solamente se limitan a juzgar un estudio basándose en si el valor-p supera o no un valor de corte arbitrario. Para pruebas de diferencias entre grupos, se acostumbra a resumir información acerca del tamaño del efecto y el tamaño del estudio con el valor-p; el tamaño del efecto puede ser estimado por otros parámetros epidemiológicos, y la precisión de la estimación, una función del tamaño del estudio, puede ser descrita por un error estándar estimado o por

el reporte de un intervalo de confianza de la estimación del efecto. En algunas situaciones, como en las pruebas de bondad de ajuste, es posible utilizar el valor-p, pero se recomienda no confundir lo que se está midiendo con la precisión de la medición, procurando utilizar mejores alternativas estadísticas para tal efecto, como estimaciones puntuales e intervalos de confianza, omitiendo siempre que sea posible el valor-p.

Kulldorff, Graubad y Velie (1999) discuten la posición anterior, indicando que los intervalos de confianza reflejan la precisión de la estimación, pero no dan una representación completa de la incertidumbre, ya que la elección del nivel de confianza es arbitrario. De esta manera, recomiendan la utilización de intervalos de confianza múltiples, pero puede ser impráctico, así que el valor-p es una alternativa fácil e informativa para representar el conjunto de intervalos de confianza, sugiriendo que sería ideal presentar intervalos de confianza y el valor-p de manera simultánea, ya que son complementarios.

Nickerson (2000) indica que una falsa percepción evidenciada por algunos investigadores es “creer que el valor-p es la probabilidad de que la hipótesis nula es cierta y que el complemento $1-(\text{valor-p})$ es la probabilidad de que la hipótesis alternativa es cierta”. Rechazar la hipótesis nula utilizando un nivel de significancia α no quiere decir que de acuerdo a los datos, la probabilidad de que la hipótesis nula es cierta es igual o inferior a α , y de la misma manera, no rechazar la hipótesis nula no significa que la hipótesis nula sea verdadera. Se cree erróneamente que rechazar la hipótesis nula es una base suficiente para aceptar la teoría que sugiere que la hipótesis nula es falsa, pues toda teoría debería probarse bajo muchos escenarios, incluso extremos, pues una predicción específica no es suficiente para probarla. Finalmente señala que es falso creer que un valor-p pequeño es evidencia de que los datos son replicables, y de la misma manera, indica que la significancia estadística no significa importancia teórica o práctica.

Si x es el valor del estadístico de prueba X de una prueba de hipótesis, donde la hipótesis nula H_0 será rechazada si $x > k$ para algún valor de k , donde el valor-p es calculado como $P(X > x)$, entonces Donahue (1999) indica que el valor-p es una función del estadístico de prueba X y, por lo tanto, es en sí mismo una variable aleatoria y un estadístico resumen de los datos, y por lo tanto puede ser usado en análisis estadístico, pero sugiere la utilización de intervalos de confianza, junto con las declaraciones de los valores de la hipótesis del parámetro de estudio, tanto para la hipótesis nula como para por lo menos un parámetro científicamente relevante a priori de una hipótesis alternativa que dé la información necesaria al lector sobre la significancia estadística y científica del resultado. Berger (2002) propone además el uso del intervalo para el valor-p, pues al igual que los intervalos de confianza ofrecen más información que los estimadores puntuales, este intervalo ofrece más información que el valor-p. Thompson (2006) por su parte indica que efectivamente el valor-p ha sido mal utilizado por algunos investigadores, sin embargo al tomarlo como una medida de

acuerdo con una hipótesis nula relativa a una alternativa, y considerando que en la práctica el interés está en la evidencia para una hipótesis, propone tomar un par de valores (el valor-p y el valor-p con hipótesis intercambiadas), como una medida bivariada de evidencia de la hipótesis alternativa.

Observe que algunos investigadores no están de acuerdo con el uso del valor-p para indicar significancia de una prueba de hipótesis, ya que este valor se limita a indicar el rechazo de una hipótesis nula si $\text{valor-p} < \alpha$, donde α es usualmente un valor predefinido antes de iniciar el estudio y que muchas veces se establece sin considerar las características del proceso que se está estudiando o sin presentar la justificación de su elección (Nickerson, 2000), de tal manera que recomiendan evitar su uso y emplear otras herramientas inferenciales como los intervalos de confianza, sin embargo, para nuestro caso, el interés está concentrado específicamente en un indicador que alerte sobre el rechazo de la hipótesis nula planteado en la ecuación (3-1); si el $\text{valor-p} < \alpha$ sugiere que la muestra tomada del proceso bajo estudio presenta suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de homogeneidad de proporciones, y por lo tanto el analista del proceso debe estudiar la presencia de una causa de variación asignable en alguna de las categorías e intervenir si es necesario. En caso contrario, no hay suficiente evidencia muestral para rechazar la hipótesis nula, y se considera que el proceso está bajo control estadístico. Con base en lo anterior, el valor-p alerta al analista ante un cambio en las proporciones de las categorías de la variable multinomial.

3.2. Propuesta 1: Carta de control multinomial usando valor-p

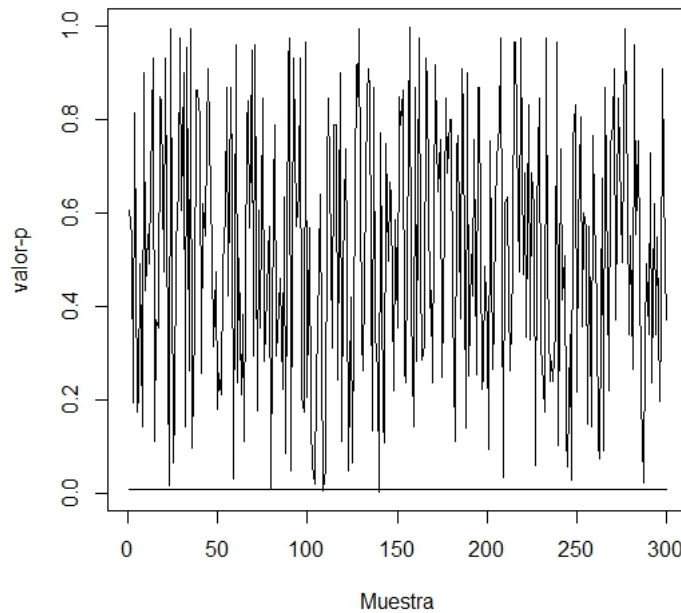
Teniendo en cuenta que bajo H_0 el $\text{valor-p} \sim U[0, 1]$ (Fairbanks y Madsen, 1982), la primera carta de control propuesta es la carta de control usando valor-p, resultado de la prueba chi cuadrado de la prueba de hipótesis de homogeneidad de proporciones de una distribución multinomial con respecto a un vector de proporciones nominal que sugiere el estado bajo control. En la carta de control se grafica el valor-p y se compara con un percentil determinado de la distribución uniforme, cuyo complemento delimita la región de rechazo dada por el intervalo $[0, \alpha)$ para un nivel de significancia de α predefinido, así que todos los valores-p que estén en dicha región indican la ocurrencia de un posible cambio en la proporción de al menos una de las categorías.

Gutiérrez y De la Vara (2004) indican que cuando se habla de límites de probabilidad, se trata de “encontrar la distribución de probabilidades del estadístico que se grafica en la carta, estimar sus parámetros y ubicar los límites de forma que un alto porcentaje de la distribución esté dentro de ellos”. Para este caso particular, la región de rechazo está dada por el intervalo $[0, \alpha)$, así que el límite de control probabilístico será α . Observe que si el

valor-p es una variable aleatoria, una carta de control que indique que el proceso está fuera de control estará caracterizada por la presencia de puntos en el intervalo $[0, \alpha)$ o por algún patrón de comportamiento no aleatorio como los que se indican en el Capítulo 2, debido a que la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos bajo el supuesto de control estadístico es casi 0.

A modo de ilustración, considere el siguiente ejemplo teórico: se toman $m = 300$ muestras de una variable multinomial \mathbf{X} , con tamaño de muestra $n = 853$ constante (de acuerdo a la teoría propuesta por Bromaghin (1993) usando $d = 0,05$) y $k = 3$ categorías con vector de proporciones nominal dado por $\mathbf{v}=(0.9,0.05,0.05)$ que coincide con las proporciones del proceso, y por lo tanto se encuentra bajo control. Suponiendo que el nivel de confianza de interés es 0,99, la carta de control está dada por la Figura 3-1.

Figura 3-1.: *Carta de Control Multinomial usando valor-p*



El límite de control probabilístico es 0,01. Para este caso particular, se presentaron 2 falsas alarmas, valor inferior al número esperado de falsas alarmas calculado en 3,08 vía simulación.

3.3. Propuesta 2: Carta de control multinomial usando transformación chi cuadrado del valor-p

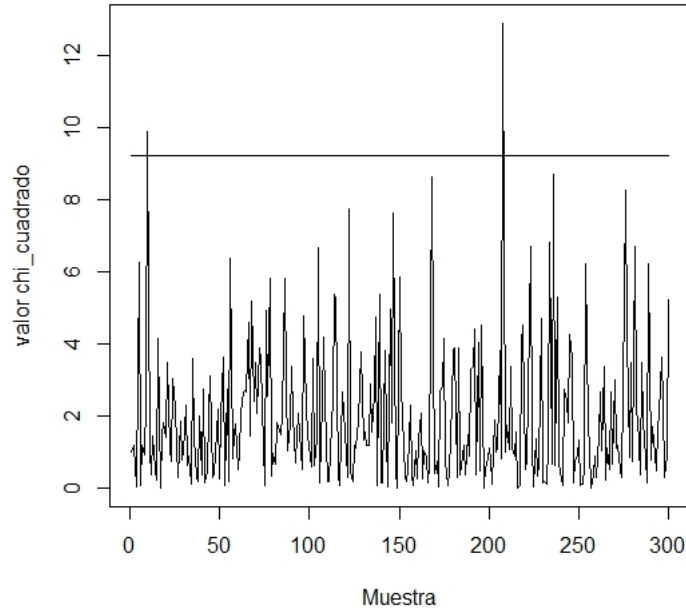
Considerando que $-2\ln(X) \sim \chi_2^2$ con $X \sim U(0,1)$ (Hogg y Craig, 1995), la segunda carta de control propuesta toma el valor-p de la prueba de hipótesis de homogeneidad de proporciones de una distribución multinomial con respecto a un vector de proporciones nominal y lo transforma, y grafica en la carta de control el valor chi cuadrado resultante.

De esta manera, por tratarse de una distribución sesgada en el intervalo $[0, \infty)$, la carta de control usando transformación chi cuadrado del valor-p indicará que el proceso está fuera de control mediante la presencia de puntos en la región de rechazo determinada por $[\chi_{2,\alpha}^2, \infty)$, o por algún patrón de comportamiento no aleatorio, donde el valor de χ_2^2 queda determinado por el percentil de interés α (Tabla 3-3), aplicando nuevamente el concepto de límites de control probabilísticos.

Tabla 3-3.: Límites chi cuadrado

Percentil	Valor chi cuadrado (LCS)
0.90	4.605
0.95	5.991
0.99	9.210
0.999	13.816

Considere una variable aleatoria multinomial bajo las mismas condiciones planteadas en el ejemplo de la carta de control multinomial usando valor-p: $n = 853$ y $k = 3$ categorías con vector de proporciones nominal dado por $\mathbf{v}=(0.9,0.05,0.05)$; la carta de control multinomial usando transformación chi cuadrado del valor-p con $\alpha = 0,01$ se presenta en la Figura 3-2. Para este caso, el valor chi cuadrado de interés, dado como el límite de control para un percentil de 0,99 es 9,21. El número esperado de falsas alarmas calculado vía simulación es 3,07 y se evidencian 2 falsas alarmas, ocurriendo la primera de ellas después de haber obtenido 9 muestras.

Figura 3-2.: *Carta de control multinomial usando valores chi cuadrado*

3.4. Propuesta 3: Carta de control multinomial usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado

Una variable aleatoria que tiene distribución chi cuadrado χ^2 , puede ser aproximada en buena medida por una distribución normal conforme aumenta el número de grados de libertad ν (Wilson y Hilferty, 1931). La aproximación está dada como sigue:

$$\left(\frac{\chi^2}{\nu}\right)^{1/3} \sim N\left(1 - \frac{2}{9\nu}, \frac{2}{9\nu}\right) \quad (3-3)$$

Utilizando esta aproximación, la tercera propuesta emplea la teoría desarrollada por Shewhart para cartas de control bajo el supuesto de normalidad. Sea $y = \left(\frac{\chi^2}{\nu}\right)^{1/3}$, y para nuestro caso $\nu = 2$ al tomar el valor chi cuadrado transformado del valor-p de la prueba de homogeneidad de proporciones para una variable multinomial, entonces $y = \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{1/3}$ y los límites de control estarían dados por la siguiente formulación:

$$LCS = \left(\frac{8}{9}\right) + Z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{1}{9}} \quad (3-4)$$

$$LC = \frac{8}{9} \quad (3-5)$$

$$LCI = \left(\frac{8}{9}\right) - Z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{1}{9}} \quad (3-6)$$

$$(3-7)$$

Recuerde que el factor multiplicador $Z_{\alpha/2}$, para $\alpha = 0,027$, es $2,99 \sim 3$ (Tabla **2-1**).

De esta manera se obtendrá una carta de control para datos individuales, y así llevamos un proceso multinomial a un proceso normal aproximado, cuya teoría está ampliamente desarrollada y se puede implementar fácilmente con los recursos computacionales requeridos, sin embargo es importante tener en cuenta que esta aproximación mejora cuando el número de grados de libertad tiende a infinito (Canal, 2005), pero para este caso sólo se consideran 2 grados de libertad de manera invariante.

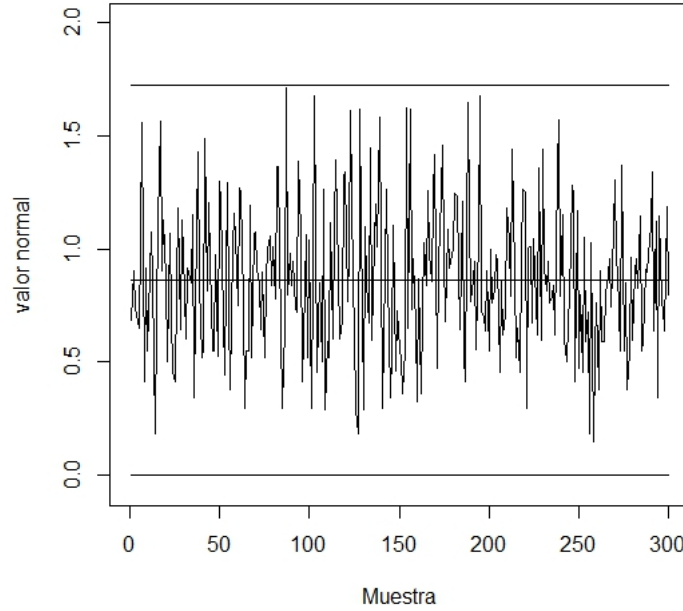
A modo de ilustración, considere nuevamente 300 muestras de tamaño $n = 853$ de una variable aleatoria multinomial con $k = 3$ características cuyo vector de proporciones nominal está dado por $\mathbf{v}=(0.9,0.05,0.05)$. La carta de control multinomial usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado, usando límites de control 3σ está dada en la Figura **3-3**.

Para este caso particular, con datos simulados bajo estado estable, el número esperado de falsas alarmas vía simulación es 1,43, pero no se observan datos por fuera de los límites de control ni otros patrones de comportamiento no aleatorio.

3.4.1. Curvas de operación para cartas de control propuestas

Según Juran y Gryna (1988) la curva de operación de una carta de control “es el trazado del valor verdadero de un parámetro del proceso frente a la probabilidad de que una muestra única caiga dentro de los límites de control”, y de la misma manera, Montgomery (2005) indica que permite calcular la “habilidad de las cartas de control para detectar corrimientos en la calidad del proceso”, graficando para cada corrimiento del estadístico de interés y varios tamaños de muestra, la probabilidad de error tipo II. Así que con el propósito de presentar la curva de operación para las cartas de control aquí propuestas, se introduce el concepto de distancia de Hellinger (ver Rao (1995), Gibbs y Su (2002)), calculada como indica la ecuación (3-8), donde p_i^* es la proporción correspondiente a la categoría i del vector de proporciones

Figura 3-3.: *Carta de Control Multinomial usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado*



nominal y p_i es la proporción correspondiente a la categoría i del vector de proporciones de una distribución multinomial con el cambio que quiere ser estudiado, considerando que k es el número de categorías, que $\sum_{i=1}^k p_i^* = 1$ y que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

$$\sum_{i=1}^k (\sqrt{p_i} - \sqrt{p_i^*})^2 * p_i^* \quad (3-8)$$

Para efectos de ilustración, $\mathbf{p}^*=(0.9,0.05,0.05)$ y solamente se disminuye la proporción de la primera categoría en un rango entre el 1 % y 10,5 % con respecto a la proporción de la primera categoría del vector de proporciones nominal, y las otras dos categorías aumentan de manera proporcional. En la Tabla **3-4** se detalla para cada porcentaje de cambio, el valor de las proporciones de cada una de las categorías y la respectiva distancia de Hellinger. Observe que a medida que aumenta el porcentaje de cambio, aumenta la distancia de Hellinger.

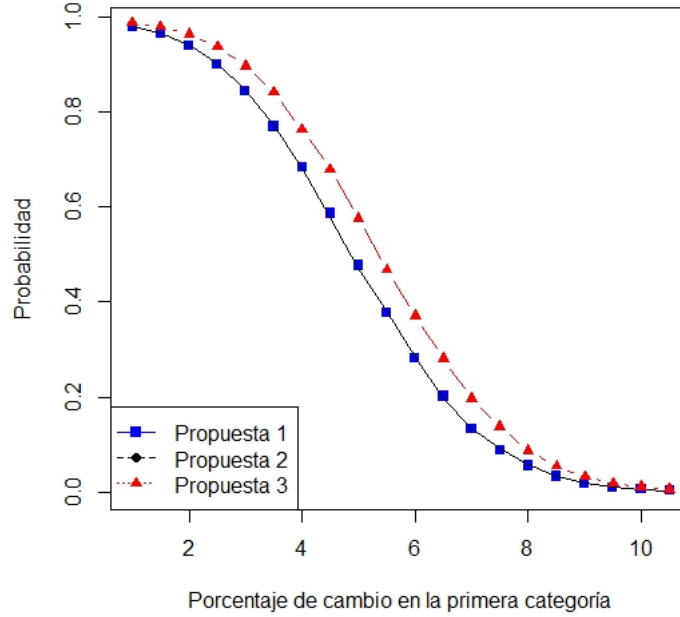
Considerando los valores de la distancia de Hellinger dados en la Tabla **3-4**, las curvas de operación para las cartas de control de las Figuras **3-1**, **3-2** y **3-3** están dadas en la Figura **3-4**. Para la carta de control multinomial usando valor-p, al igual que para la carta de

Tabla 3-4.: Distancia de Hellinger para cambios en proporciones

Porcentaje de cambio	Probabilidad β Propuesta 1	Probabilidad β Propuesta 2	Probabilidad β Propuesta 3	Distancia de Hellinger
1.0 %	0.981	0.980	0.988	3.0045e-05
1.5 %	0.967	0.965	0.979	6.7269e-05
2.0 %	0.939	0.939	0.965	1.1903e-04
2.5 %	0.898	0.901	0.936	1.8519e-04
3.0 %	0.848	0.845	0.896	2.6560e-04
3.5 %	0.775	0.771	0.841	3.6015e-04
4.0 %	0.685	0.685	0.764	4.6874e-04
4.5 %	0.584	0.585	0.672	5.9128e-04
5.0 %	0.476	0.475	0.576	7.2772e-04
5.5 %	0.377	0.380	0.467	8.7799e-04
6.0 %	0.283	0.283	0.367	1.0420e-03
6.5 %	0.201	0.201	0.276	1.2198e-03
7.0 %	0.138	0.137	0.200	1.4114e-03
7.5 %	0.086	0.093	0.132	1.6167e-03
8.0 %	0.055	0.054	0.087	1.8357e-03
8.5 %	0.031	0.032	0.055	2.0684e-03
9.0 %	0.018	0.018	0.033	2.3148e-03
9.5 %	0.010	0.009	0.017	2.5750e-03
10.0 %	0.005	0.005	0.009	2.8490e-03
10.5 %	0.002	0.002	0.005	3.1367e-03

control multinomial usando transformación chi cuadrado del valor-p, las cuales tienen diferencias pequeñas que no se perciben fácilmente en la figura, hay una probabilidad de 0,28 de que una disminución del 6 % en la primera categoría pase desapercibida, mientras que para la carta de control multinomial usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado la probabilidad es de 0,37. Observe que la probabilidad de que las cartas de control indiquen que el proceso está bajo control cuando realmente no lo está disminuye a medida que aumenta la distancia entre las proporciones.

Figura 3-4.: *Curvas de operación para cartas de control multinomial propuestas con $\mathbf{p}^*=(0.9,0.05,0.05)$*



3.5. Extensiones a las cartas de control propuestas

3.5.1. Cartas de control multinomial y marginales binomiales

Como el propósito es monitorear una variable multinomial de un proceso, donde la distribución marginal de cada categoría es binomial (Agresti, 2002), hacer cartas de control binomiales simultáneas para cada categoría incluyendo además la carta de control multinomial, permite observar el comportamiento completo del proceso, pero teniendo en cuenta que se trata de conteos dependientes dada la naturaleza de la variable aleatoria estudiada, se procede a utilizar límites de control dados por intervalos de confianza simultáneos presentados en el capítulo anterior, así que considerando los resultados encontrados por González (2010), se utilizará el intervalo de confianza exacto basado en la distribución F (ver ecuación (2-34)), teniendo en cuenta que de acuerdo a la ecuación (2-17), $y = E(n_i) = n\pi_i$.

A modo de ilustración, considere un proceso con una variable multinomial con $k = 4$ categorías y un vector de proporciones $\mathbf{v}=(0.8,0.06,0.06,0.08)$, de donde se empieza a tomar muestras con tamaño $n = 905$, pero después de 150 muestras, debido a una intervención particular, el vector de proporciones cambia a $\mathbf{v}'=(0.8160,0.0552,0.0552,0.0736)$. Observe que todas las categorías cambian, así que se espera que las cartas de control marginales presenten

una condición fuera de control después de la intervención.

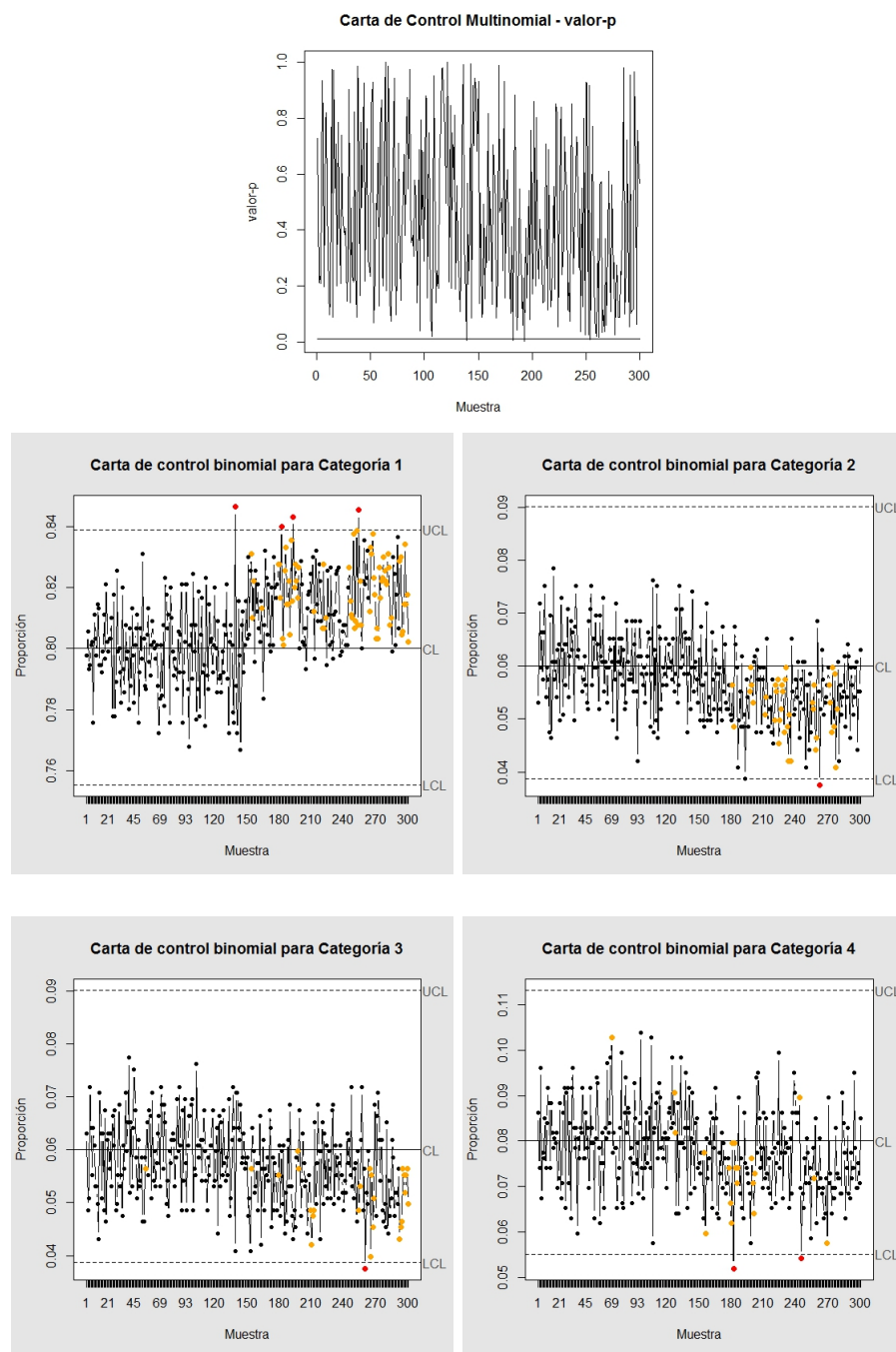
La Figura **3-5** muestra la carta de control multinomial elaborada de acuerdo a la Sección 3.2 con $\alpha = 0,01$, y usando la librería `qcc` de R, muestra las cartas de control binomiales para cada una de las cuatro categorías.

La carta de control multinomial presenta un cambio de nivel a partir de la muestra 150 e identificó tres muestras fuera de control en las muestras 182, 193 y 254, así que un análisis detallado de los datos sugiere que hubo un cambio leve en el proceso. Por lo tanto, graficar las cartas de control marginales para cada categoría indicará el comportamiento de la proporción de cada una de ellas, y permitirá validar si efectivamente hubo un cambio. Para las cartas de control marginales binomiales los límites de control deberán ser construídos con base en el proceso bajo control, correspondiente a las primeras 150 muestras, y la línea central deberá ser igual al valor asociado en el vector de proporciones \mathbf{v} .

Bajo control, el número esperado de falsas alarmas calculado vía simulación para la primera carta de control marginal es 0.53, 0.55 para la segunda y la tercera, y 0.57 para la cuarta. Revisando la carta de control binomial para la categoría 1 en la Figura **3-5**, se identifica un notable corrimiento hacia arriba de la línea central, presentando 4 puntos por fuera de la línea de control superior, sugiriendo que efectivamente esta categoría cambió de nivel, confirmando la información inicialmente presentada en la carta de control multinomial. La carta de control marginal para la categoría 2 presenta un corrimiento hacia abajo a partir de la muestra 150 y tiene 1 punto por fuera del límite de control inferior, comportamiento similar evidenciado en la carta de control marginal para la proporción de la categoría 3, al igual que en la carta de control marginal para la proporción de la categoría 4 con 2 puntos por fuera del límite de control inferior. Con esta información, suministrada en conjunto por la carta de control multinomial y las cartas de control marginales, el analista del proceso debe revisar la condición que generó el cambio en el proceso bajo estudio.

Se recomienda utilizar cartas de control marginales siempre que se evidencia una condición fuera de control, pues será necesario identificar cómo cambiaron las categorías para proceder con un plan de acción que permita llevar el proceso nuevamente a estado bajo control, o para identificar cuál fue la condición que ocasionó una mejora en el proceso y proceder a establecer un nuevo patrón de operación. Además, deben ser usadas cuando exista duda sobre el estado de control del proceso, pues las cartas de control marginales permitirán validar cambios en el comportamiento de cada una de las categorías de la variable multinomial. De esta manera, deben ser utilizadas siempre que sea posible, y aunque la dificultad surge cuando aumenta el número de categorías, pues será necesario elaborar y analizar más cartas de control, éstas suministrarán información complementaria al analista del proceso. Cuando ésto ocurra, se recomienda además agrupar categorías hasta donde lo permita el proceso, o utilizar cartas de

Figura 3-5.: *Carta de control multinomial usando valor-p y cartas de control univariadas para cada una de las cuatro categorías del proceso*

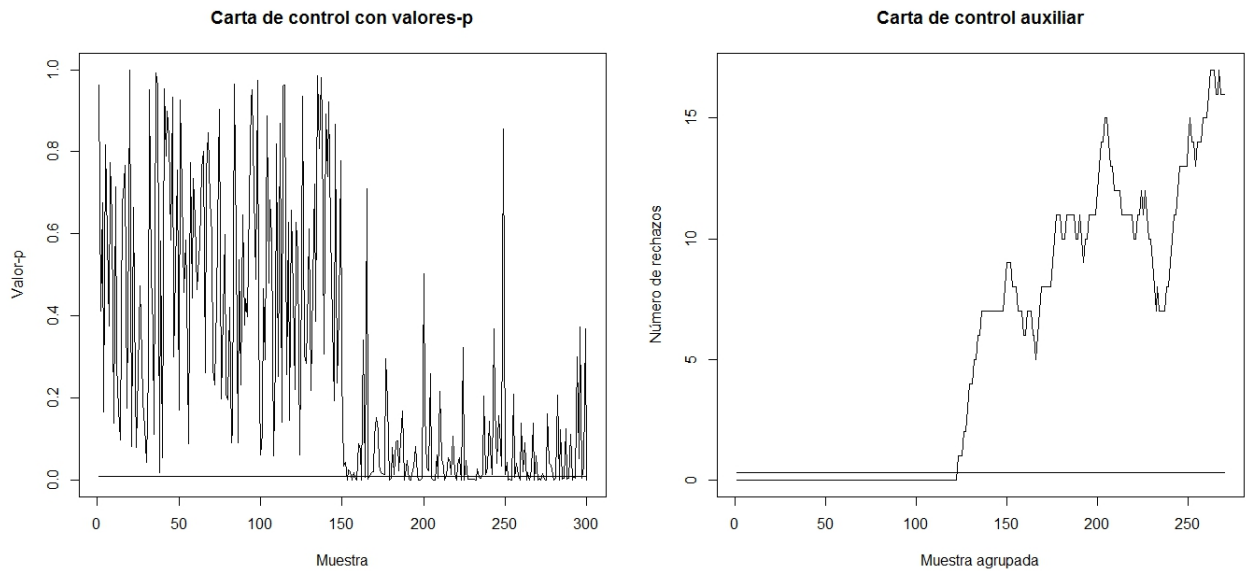


control complementarias como cartas de control p para monitorear la salida total defectuosa del proceso.

3.5.2. Carta de control auxiliar con muestras agrupadas

De manera complementaria a las cartas de control presentadas en las Secciones 3.2, 3.3 y 3.4 se propone utilizar una carta de control auxiliar que cuente el número de rechazos en una muestra agrupada de tamaño c definido comparando con el número de rechazos tolerables bajo el modelo establecido, esto es, considere una carta de control usando valor-p tal como la Figura 3-6, proveniente de un proceso del que se toman 300 muestras cada una de tamaño 905, y a partir de la muestra 150 el proceso cambia de un vector nominal de proporciones $\mathbf{v}=(0.80, 0.06, 0.06, 0.08)$ a un vector con valores $\mathbf{v}'=(0.84, 0.048, 0.048, 0.064)$ correspondiente a un incremento de 5% en la primera proporción y una disminución proporcional en las otras 3 categorías, y considere una tasa de falsas alarmas de $\alpha = 0,01$. Tome las primeras $c = 30$ muestras, cuente el número de veces que se rechazó la prueba de homogeneidad de proporciones y gráfiquelo como el primer punto en la carta de control auxiliar con muestras agrupadas; luego tome desde la muestra 2 hasta la muestra 31, cuente el número de veces que se rechazó la prueba de homogeneidad de proporciones y gráfiquelo como el segundo punto en la carta de control auxiliar con muestras agrupadas, y así de manera sucesiva hasta llegar a la muestra 270. En 30 muestras, con una tasa de falsas alarmas de $\alpha = 0,01$, con un proceso estable bajo control estadístico, se esperaría encontrar $c * \alpha = 30 * 0,01 = 0,3$ muestras, de tal manera que si hay un cambio en el proceso que se está estudiando, el número de muestras en la muestra agrupada de tamaño c debe exceder esta cantidad esperada.

Figura 3-6.: *Carta de control auxiliar con muestras agrupadas usando valor-p*



Para este caso, la carta de control multinomial usando valor-p no detectó falsas alarmas en

las primeras 150 muestras, pero a partir de la muestra 151 detectó 56 muestras fuera de control. De manera complementaria, la carta de control auxiliar con muestras agrupadas indica que después de la muestra agrupada 123 hay un marcado crecimiento en el número de rechazos y por lo tanto hubo un cambio de nivel en el proceso multinomial estudiado.

Ahora, considere un cambio no de 5 % si no de 2 %, esto es, se pasa de un vector nominal de proporciones $\mathbf{v}=(0.80, 0.06, 0.06, 0.08)$ a un vector con valores $\mathbf{v}'=(0.816, 0.0552, 0.0552, 0.0736)$. La Figura **3-7** muestra la carta de control usando valor-p y 5 cartas de control auxiliares con muestras agrupadas con $c = 5, 10, 20, 30, 50$.

La carta de control multinomial tiene un cambio de nivel a partir de la muestra 150, a partir de donde se rechaza la prueba de homogeneidad de proporciones en las muestras 161, 193, 227, 240, 280 y 283. La carta de control auxiliar con muestras agrupadas con $c = 5$ detecta el primer rechazo en la muestra 156 y sostiene su efecto en las muestras 157, 158, 159 y 160, y de ahí en adelante vuelve a su estado bajo control hasta la muestra 188 que detecta el rechazo de la muestra 193 de la carta de control multinomial usando valor-p, mientras que para el caso de $c = 50$, la detección ocurre en la muestra 111 a partir de la cual permanece en estado fuera de control.

Observe que la carta de control auxiliar con muestras agrupadas puede ser muy útil cuando hay un cambio de nivel, pues resulta ser más sensible debido a que a medida que aumenta el tamaño de la muestra agrupada aumenta la permanencia de una señal fuera de control en la carta de control usando valor-p al indicar la presencia de una cantidad de rechazos mayor a la esperada. Así, es posible utilizar un tamaño de muestras agrupadas c dependiendo del nivel de “sensibilidad” que desee el analista del proceso, pues valores pequeños de c como 5, 10 ó 15, generarán cartas de control auxiliares con muestras agrupadas más sensibles ante cambios más frecuentes porque no guardan la misma historia del proceso que una carta de control auxiliar con muestras agrupadas con valores de c como 30 o 50. La Tabla **3-5** presenta para los datos procedentes de la Figura **3-7**, para cada tamaño de muestra agrupada (c), el número de muestras que se dibujan en la carta de control auxiliar con muestras agrupadas, el número de rechazos (Re) y el número de muestras hasta que ocurre el primer rechazo, indicando que a medida que aumenta el tamaño de muestra agrupada aumenta el número de rechazos y disminuye el número de muestras agrupadas antes del primer rechazo en la carta de control auxiliar.

Este procedimiento y análisis es extensivo para las otras dos cartas de control propuestas presentadas previamente.

Figura 3-7.: *Carta de control multinomial usando valor-p y cartas de control auxiliares con muestras agrupadas para $c = 5, 10, 20, 30, 50$*

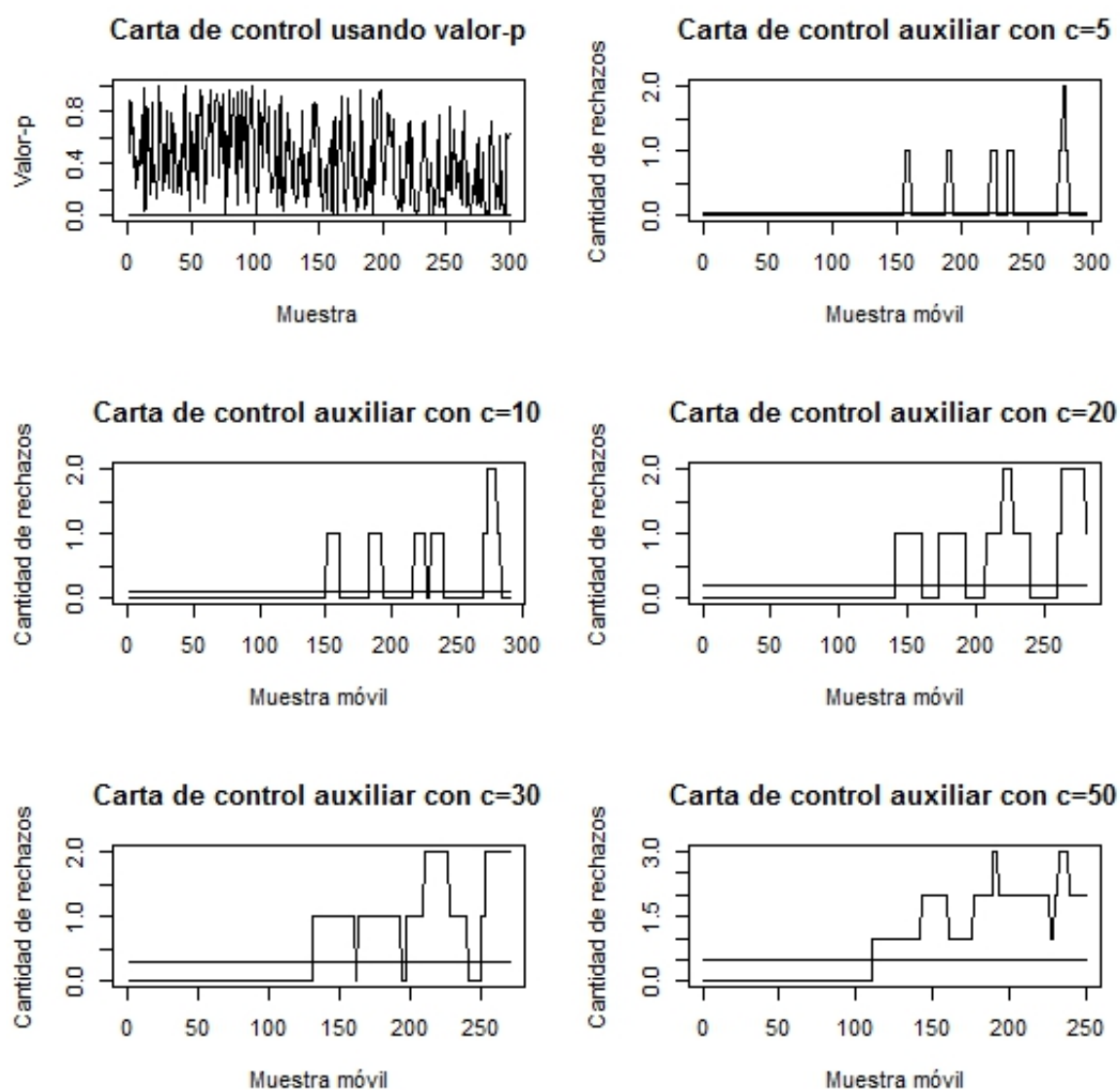


Tabla 3-5.: Comportamiento del número de rechazos y número de muestras antes del primer rechazo para diferentes tamaños de muestra agrupados

Tamaño de muestra agrupada	Número de muestras agrupadas	Número de rechazos	Número de muestras antes del primer rechazo
5	296	28	156
7	294	38	154
10	291	53	151
13	288	68	148
15	286	76	146
17	284	84	144
20	281	94	141
25	276	109	136
30	271	124	131
35	266	135	126
40	261	140	121
45	256	140	116
50	251	140	111

4. Análisis de propuestas

Con el propósito de observar el desempeño de las cartas de control propuestas, es necesario considerar varios escenarios, pero dadas las limitaciones de espacio y tiempo para llevarlas a cabo, son realizados vía simulación.

Tomando $k = 4$ categorías, las simulaciones se realizaron considerando un proceso bajo control y considerando un proceso fuera de control, teniendo en cuenta cambios de 2 %, 4 % y 6 % en la primera categoría.

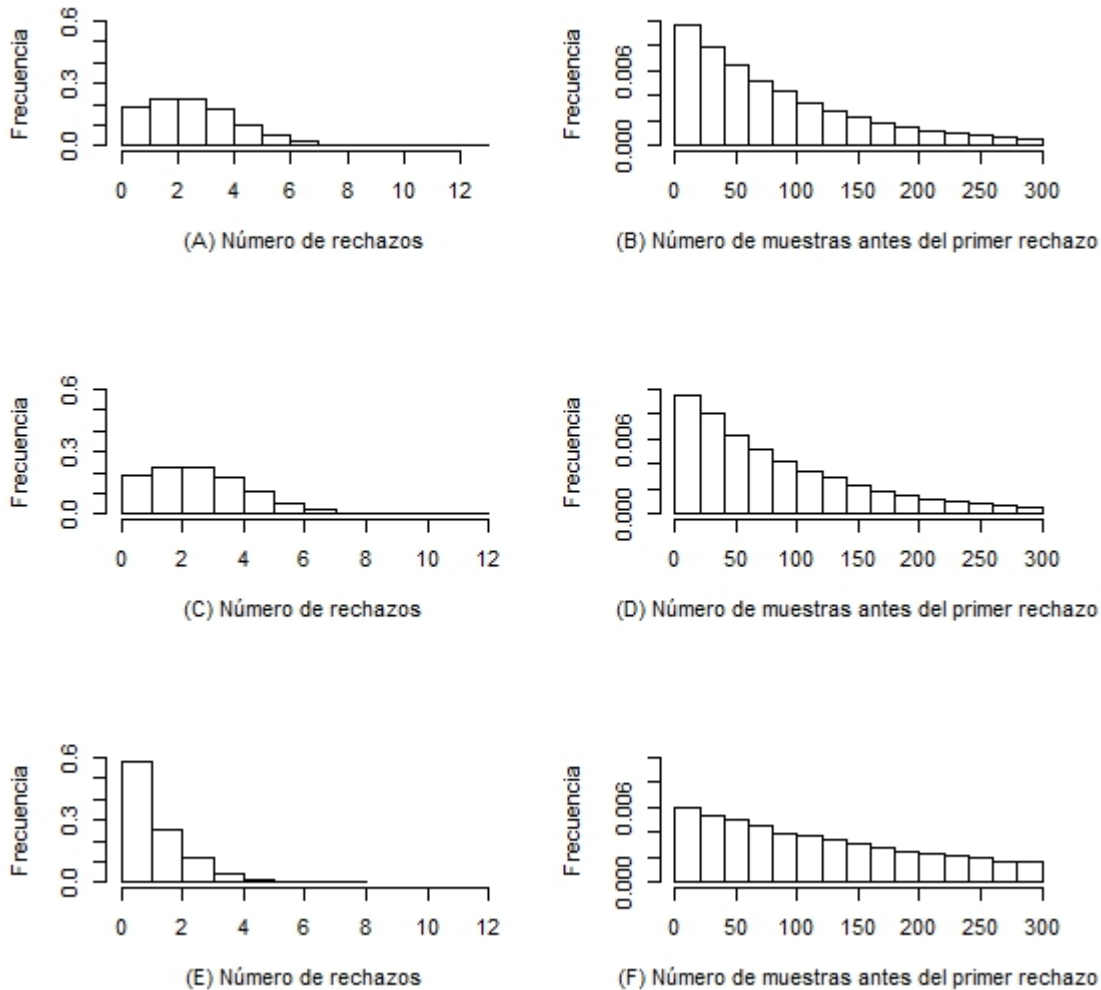
4.1. Simulaciones asumiendo proceso bajo control

Considere un proceso multinomial con $k = 4$ categorías y con vector de proporciones nominal dado por $v=(0.80,0.06,0.06,0.08)$ estable en el tiempo, de donde se toman 300 muestras. Utilizando $d = 0,05$ y $\alpha = 0,01$, el tamaño de muestra es $n = 905$ (Bromaghin, 1993). Cada carta de control se simula 50000 veces para proporcionar resultados más precisos (Launggrong, 2010), y se estudia la distribución de frecuencias del número de rechazos (Re) y el número de muestras hasta que ocurre el primer rechazo o longitud de corrida promedio (RL). La Figura 4-1 presenta los histogramas de número de rechazos y longitud de corrida para $\alpha = 0,01$ de la carta de control multinomial usando valor-p, usando transformación chi cuadrado del valor-p y usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado.

Observe que el comportamiento de los histogramas asociados a la carta de control multinomial usando valor-p (Figuras 4-1(A) y 4-1(B)) es similar al comportamiento de los asociados a la carta de control multinomial usando transformación chi cuadrado del valor-p (Figuras 4-1(C) y 4-1(D)); en ambos casos, el número medio de rechazos es 3,05 oscilando entre 0 y 13, mientras que para la carta de control multinomial usando transformación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado (Figuras 4-1(E) y 4-1(F)), el número medio de rechazos es 1,42 oscilando entre 0 y 8.

Para las cartas de control multinomial usando valor-p y usando transformación chi cuadrado del valor-p, el número medio de rechazos obtenido coincide con el teórico, y de esta manera el $ARL = 1/p = 1/\alpha = 100$, sin embargo, para la carta de control multinomial usando transformación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado, el número medio de rechazos es

Figura 4-1.: (A) Número de rechazos para cartas de control multinomiales usando valor- p , (B) longitud de corrida para cartas de control usando valor- p , (C) número de rechazos para cartas de control multinomiales usando transformación chi cuadrado al valor- p , (D) longitud de corrida para cartas de control usando transformación chi cuadrado al valor- p , (E) número de rechazos para cartas de control multinomiales usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado, (F) longitud de corrida para cartas de control usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado, considerando procesos bajo control.



inferior al teórico, de tal manera que la probabilidad de encontrar un punto fuera de control en 300 muestras será $1,42/300 = 0,005$, obteniendo un $ARL = 200$. De esta manera, la carta de control multinomial usando transformación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado es

una carta de control que presenta una tasa menor de falsas alarmas con respecto a las cartas de control multinomial usando valor-p y usando transformación chi cuadrado del valor-p.

4.2. Simulaciones asumiendo proceso fuera de control

Considerando nuevamente un proceso multinomial con $k = 4$ categorías y con vector de proporciones nominal dado por $v=(0.80,0.06,0.06,0.08)$ y que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, tal como lo indica la ecuación (2-16), el plan de simulaciones para analizar el desempeño de las cartas de control propuestas bajo condiciones fuera de control, asociadas con el cambio en los parámetros de la distribución, consiste en hacer un cambio porcentual de 2 %, 4 % y 6 % en la primera categoría de los datos simulados. La Tabla 4-1 presenta el valor de las proporciones de las categorías después de haber realizado un incremento y una disminución en la primera categoría correspondiente a los porcentajes mencionados.

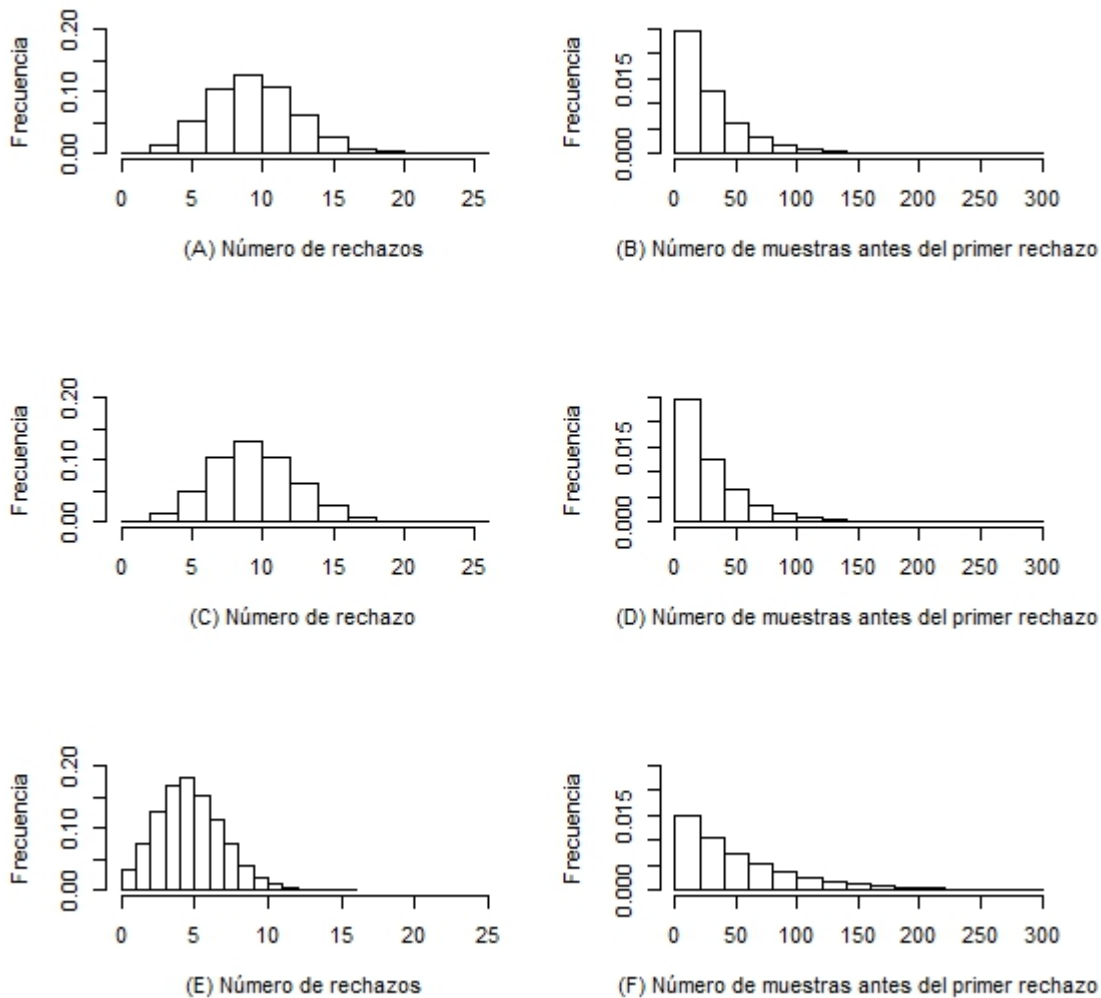
Tabla 4-1.: Cambios simulados en las proporciones

Categoría	Incremento en proporción			Disminución en proporción		
	2 %	4 %	6 %	2 %	4 %	6 %
c_1	0.816	0.832	0.848	0.784	0.768	0.752
c_2	0.055	0.0504	0.0456	0.065	0.0696	0.0744
c_3	0.055	0.0504	0.0456	0.065	0.0696	0.0744
c_4	0.074	0.0672	0.0608	0.086	0.0928	0.0992

Para cada carta de control se simulan 50000 corridas y se analiza la distribución de frecuencias del número de rechazos (Re) y de la longitud de corrida (RL), esperando que los valores esperados sean superiores a los encontrados en las simulaciones asumiendo proceso bajo control. Las gráficas asociadas a cada una de las posibilidades descritas en la Tabla 4-1 se ilustran para $\alpha = 0,01$ y para incrementos, ya que para disminuciones el comportamiento es similar.

La Figura 4-2 presenta los histogramas del número de rechazos y número de muestras antes del primer rechazo para $\alpha = 0,01$ de la carta de control multinomial usando valor-p (Figuras 4-2(A) y 4-2(B)), usando transformación chi cuadrado del valor-p (Figuras 4-2(C) y 4-2(D)) y usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado (Figuras 4-2(E) y 4-2(F)), simulando un incremento de 2 % en la proporción de la primera categoría y una disminución proporcional en las categorías restantes. Para las dos primeras propuestas, el número medio de rechazos es 9,95 oscilando entre 0 y 26, mientras que para la tercera

Figura 4-2.: (A) Número de rechazos para cartas de control multinomiales usando valor- p , (B) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando valor- p , (C) número de rechazos para cartas de control multinomiales usando transformación χ^2 al valor- p , (D) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando transformación χ^2 al valor- p , (E) número de rechazos para cartas de control multinomiales usando aproximación Wilson-Hilferty para variables χ^2 , (F) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando aproximación Wilson-Hilferty para variables χ^2 , con aumento en el 2% en la proporción de la primera categoría.



propuesta el número medio de rechazos es 5,21 encontrando que el 0,54 % no detectó puntos por fuera de control; observe además que en las tres propuestas, el valor promedio es mayor

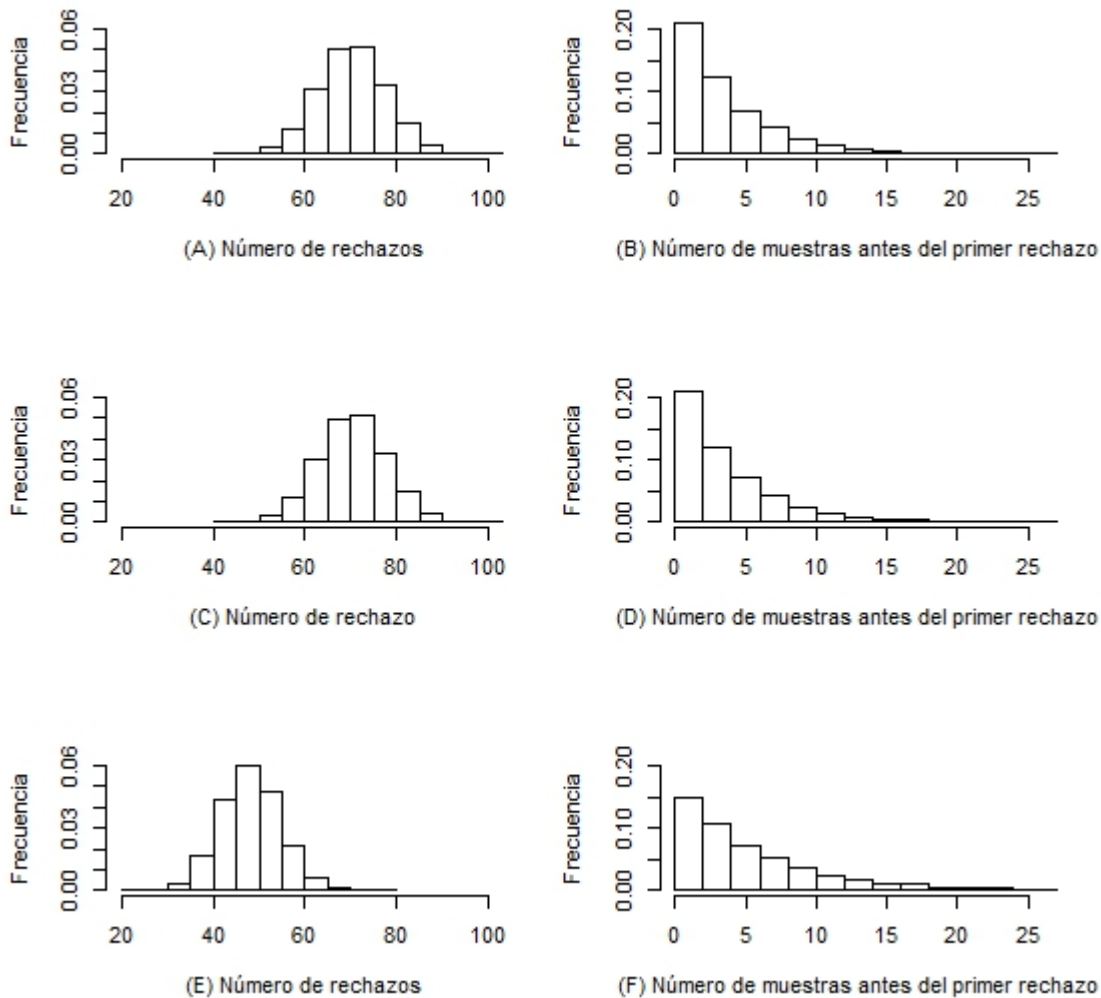
al número de rechazos esperado para un proceso bajo control. Las propuestas 1 y 2 no detectaron cambios el 1 % de las veces, mientras que la propuesta 3 no lo hizo el 3,2 % de las veces. Las propuestas 1 y 2 detectaron el 48,9 % de las veces un número mayor de rechazos al esperado en las primeras 20 muestras, mientras que la propuesta 3 solamente lo detectó el 29,54 % de las veces.

La Figura 4-3 presenta los histogramas asociados a la simulación de cada una de las propuestas con aumento del 4 % en la primera categoría. Para la carta de control multinomial usando valor-p (Figuras 4-3(A) y 4-3(B)) y transformación chi cuadrado al valor-p (Figuras 4-3(C) y 4-3(D)), el número medio de rechazos es 70,9, oscilando entre 41 y 104, mientras que para la carta de control multinomial usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado (Figuras 4-3(E) y 4-3(F)), el número medio de rechazos es 48,6 oscilando entre 23 y 76. Las propuestas 1 y 2 detectaron el 99,5 % de las veces un número mayor de rechazos al esperado en las primeras 20 muestras simuladas, mientras que la propuesta 3 solamente detectó el 97,14 %. Si consideramos el porcentaje de veces que las propuestas detectaron un número mayor de rechazos al esperado en las primeras 10 muestras simuladas, para las propuestas 1 y 2 fue de 93,1 % y para la propuesta 3 fue de 83,1 %.

La Figura 4-4 presenta los histogramas asociados a cada una de las propuestas con aumento en el 6 % en la primera categoría. Para las cartas de control multinomiales usando valor-p (Figuras 4-4(A) y 4-4(B)) y transformación chi cuadrado al valor-p (Figuras 4-4(C) y 4-4(D)), el número medio de rechazos es 211 oscilando entre 180 y 243, y para las cartas de control multinomiales usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado (Figuras 4-4(E) y 4-4(F)), el número medio de rechazos es 181,6 oscilando entre 147 y 224. Las tres propuestas detectaron el 100 % de las veces un número mayor de rechazos al esperado en las primeras 10 muestras simuladas, y si consideramos el porcentaje de veces que las propuestas detectaron un número mayor de rechazos al esperado en las primeras 5 muestras simuladas, para las propuestas 1 y 2 fue de 99,78 % y para la propuesta 3 fue de 99,04 %.

De esta manera, cuando ocurre un cambio de 2 % o 4 % en la primera categoría, con el respectivo cambio proporcional en las tres categorías restantes, las propuestas 1 y 2 presentan un mejor desempeño que la propuesta 3, y cuando el cambio es de 6 %, las 3 propuestas presentan un desempeño similar para detectar el cambio, de tal manera que a medida que aumenta el cambio mejora el desempeño de las propuestas. Lo anterior se corrobora además visualizando las curvas de operación para los escenarios presentados en este capítulo (ver Figura 4-5), donde retomando el concepto de distancia de Hellinger, se elabora la Tabla 4-2 presentando para cada porcentaje de cambio, la probabilidad β de que la carta de control propuesta indique que el proceso está bajo control cuando en realidad no es así. Observe que para todos los porcentajes de cambio descritos, la probabilidad β es mayor en la propuesta 3, y por lo tanto, considerando que el propósito es minimizar la probabilidad β dada

Figura 4-3.: (A) Número de rechazos para cartas de control multinomiales usando valor- p , (B) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando valor- p , (C) número de rechazos para cartas de control multinomiales usando transformación χ^2 al valor- p , (D) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando transformación χ^2 al valor- p , (E) número de rechazos para cartas de control multinomiales usando aproximación Wilson-Hilferty para variables χ^2 , (F) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando aproximación Wilson-Hilferty para variables χ^2 , con aumento en el 4% en la proporción de la primera categoría.



una probabilidad α (Montgomery, 2005), se recomienda la utilización de las propuestas 1 y 2.

Figura 4-4.: (A) Número de rechazos para cartas de control multinomiales usando valor- p , (B) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando valor- p , (C) número de rechazos para cartas de control multinomiales usando transformación chi cuadrado al valor- p , (D) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando transformación chi cuadrado al valor- p , (E) número de rechazos para cartas de control multinomiales usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado, (F) número de muestras antes del primer rechazo para cartas de control multinomiales usando aproximación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado, con aumento en el 6% en la proporción de la primera categoría.

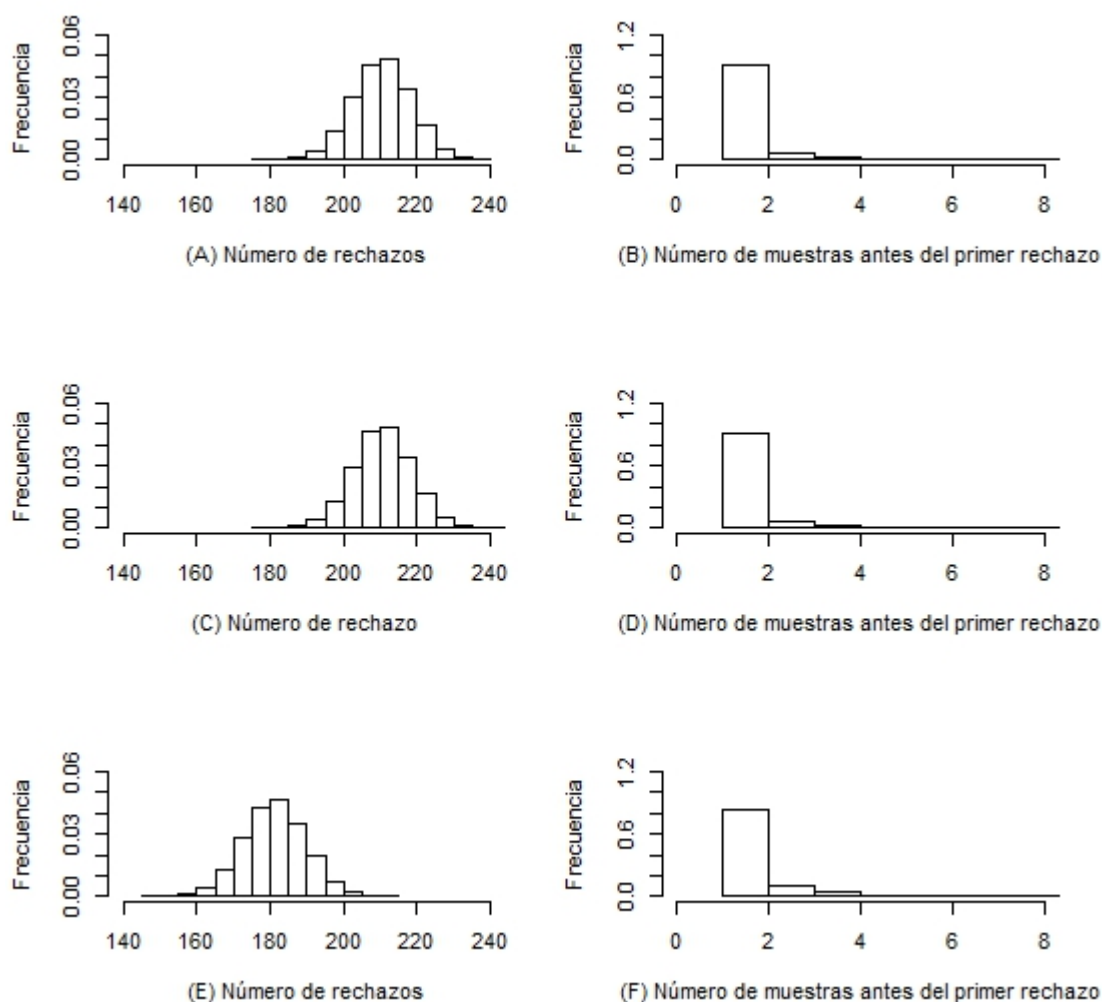
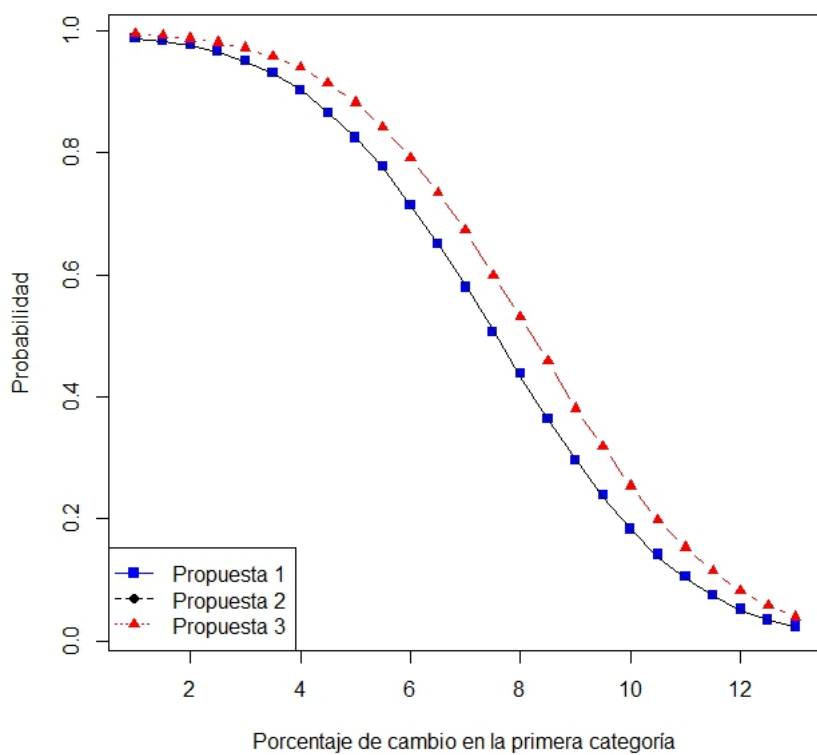


Tabla 4-2.: Probabilidad de no detectar cambios para cambios en proporciones simulados

Porcentaje de cambio	Distancia de Hellinger	Probabilidad β Propuesta 1	Probabilidad β Propuesta 2	Probabilidad β Propuesta 3
1.0 %	2.1414e-05	0.987	0.988	0.993
1.5 %	4.8159e-05	0.982	0.982	0.992
2.0 %	8.5579e-05	0.975	0.976	0.987
2.5 %	1.3367e-04	0.965	0.964	0.980
3.0 %	1.9243e-04	0.951	0.949	0.970
3.5 %	2.6185e-04	0.928	0.931	0.957
4.0 %	3.4195e-04	0.900	0.902	0.939
4.5 %	4.3274e-04	0.870	0.866	0.915
5.0 %	5.3422e-04	0.824	0.830	0.882
5.5 %	6.4640e-04	0.777	0.772	0.842
6.0 %	7.6932e-04	0.716	0.715	0.790
6.5 %	9.0298e-04	0.648	0.650	0.737
7.0 %	1.0474e-03	0.581	0.583	0.670
7.5 %	1.2026e-03	0.507	0.510	0.602
8.0 %	1.3687e-03	0.432	0.436	0.529
8.5 %	1.5456e-03	0.360	0.362	0.457
9.0 %	1.7334e-03	0.294	0.300	0.384
9.5 %	1.9322e-03	0.237	0.235	0.318
10.0 %	2.1419e-03	0.184	0.183	0.256
10.5 %	2.3626e-03	0.139	0.139	0.202

Figura 4-5.: *Curva de operación para cartas de control multinomiales propuestas con $\mathbf{p}^*=(0.80,0.06,0.06,0.08)$*



5. Aplicación en un proceso de producción

Considere un proceso de producción de prendas de vestir donde se chequean cada tres horas 1100 unidades terminadas y se clasifica cada una de ellas en una de las siguientes categorías:

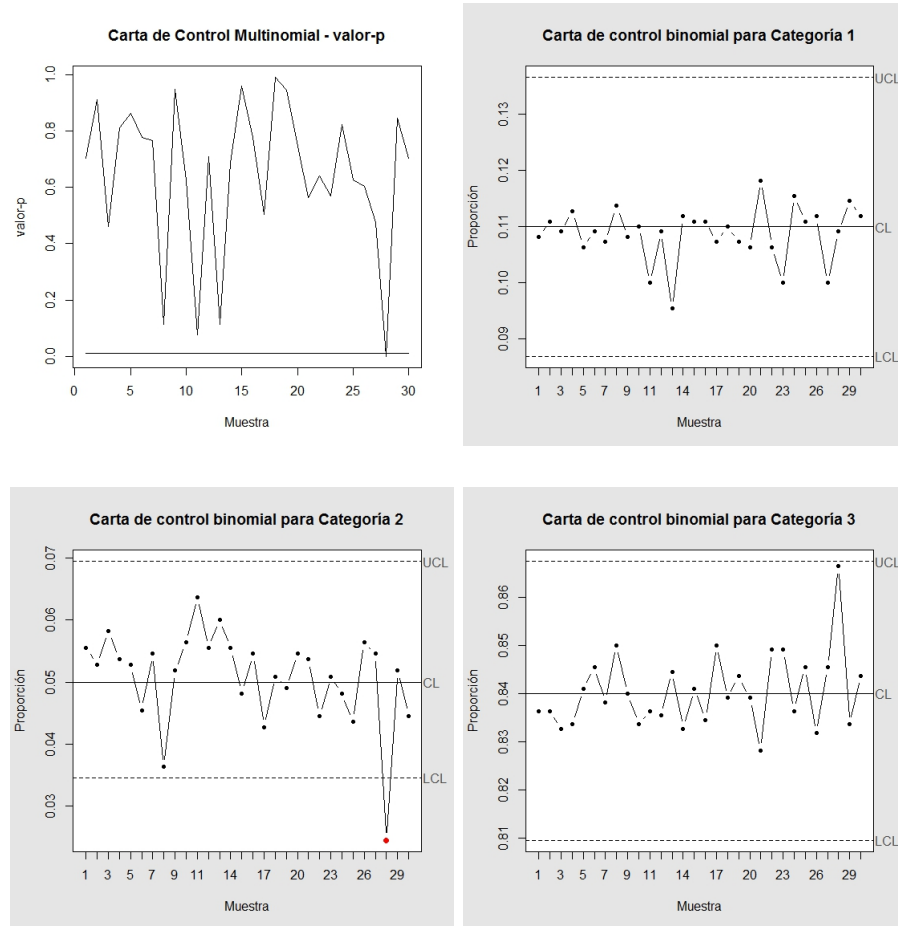
1. Categoría 1: prendas para saldos.
2. Categoría 2: prendas defectuosas.
3. Categoría 3: prendas aptas para la venta.

De acuerdo a estudios previos de análisis de datos del proceso, las proporciones de cada una de las categorías son 11 %, 5 % y 84 % respectivamente. Si se presentan porcentajes superiores en alguna de las dos primeras categorías, el personal encargado de chequear las prendas tiene la responsabilidad de alertar al equipo de trabajo, detener el proceso, identificar la causa del cambio y gestionar su corrección, ya que una disminución en la proporción de las prendas aptas para la venta implica disminución en los ingresos de la empresa. De manera complementaria, si hay un incremento en la proporción de prendas aptas para la venta, se trabaja en la identificación de las condiciones bajo las cuales ocurrió con el propósito de volverlas estándar en el proceso de producción.

Así que con el propósito de monitorear el proceso, se recomendó la utilización de una carta de control multinomial usando valor-p con cartas de control marginales binomiales, usando un $\alpha = 0,01$ como región de rechazo. En la Figura 5-1 se presentan las cartas de control multinomial y binomiales marginales para las tres categorías. Observe que la carta de control multinomial indica que el proceso estuvo bajo control excepto cuando se tomó la muestra número 28 donde se encontró que el 2,54 % de las prendas fueron clasificadas en la categoría 2, situación que se evidencia con un punto en la región de rechazo de la carta de control de la categoría 2, y consecuentemente un incremento en la proporción de prendas aptas para la venta, pues la proporción de prendas para saldos no se vió alterada.

De esta manera, el proceso se ha comportado bajo control, y el hallazgo de una disminución en la proporción de prendas defectuosas ha sido vista por el equipo de trabajo como una oportunidad para encontrar mejores prácticas de operación una vez identificada la causa asignable.

Figura 5-1.: *Carta de control multinomial usando valor-p y cartas de control marginales binomiales para el proceso de producción de prendas de vestir*



6. Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

Este trabajo presenta una revisión general de las cartas de control más utilizadas como herramienta para identificar causas asignables de variación, bajo el contexto de aplicación del Control Estadístico de Procesos (CEP), y se introducen tres propuestas para monitorear procesos con variables multinomiales, basadas en el valor-p de la prueba de hipótesis de homogeneidad de proporciones: carta de control multinomial usando valor-p, carta de control multinomial usando transformación chi cuadrado al valor-p y carta de control multinomial usando transformación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado, y se proponen dos extensiones: carta de control multinomial y marginales binomiales, y carta de control auxiliar con muestras agrupadas.

Las cartas de control para procesos con variables multinomiales fueron estudiadas vía simulación, analizando la distribución de frecuencias del número de rechazos (Re) y la longitud de corrida (RL), considerando un escenario bajo control y cambios totales en la distribución de 2 %, 4 % y 6 % en la primera categoría y en las siguientes de manera proporcional.

Bajo control, las cartas de control usando valor-p y usando transformación chi cuadrado al valor-p tienen un $ARL = 100$, mientras que la carta de control multinomial usando transformación Wilson-Hilferty para variables chi cuadrado tiene un $ARL = 200$, de tal manera que para esta última propuesta se requieren más muestras antes de detectar una falsa alarma. Fuera de control, cuando ocurre un cambio de 2 % o 4 % en la primera categoría, con el respectivo cambio proporcional en las tres categorías restantes, las propuestas 1 y 2 presentan un mejor desempeño que la propuesta 3, pero cuando el cambio es de 6 %, las 3 propuestas presentan un desempeño similar para detectar el cambio, de tal manera que a medida que aumenta el cambio mejora el desempeño de las propuestas. Este comportamiento se ilustra además en las curvas de operación presentadas en el Capítulo 4 elaboradas con base en la distancia de Hellinger.

Las cartas de control aquí propuestas deben ser utilizadas para tamaños de muestra grandes, asociadas con procesos de producción masiva como en industrias de alimentos o de confecciones, y se sugiere utilizar la carta de control multinomial y marginales binomiales, o la carta de control auxiliar con muestras agrupadas cuando sea necesario identificar la categoría que

cambió, o cuando se tenga duda sobre si el proceso está o no bajo control; las restricciones de estas propuestas sugieren un trabajo posterior de profundización.

6.2. Recomendaciones

Considerando que la mayoría de las propuestas en el área de Control Estadístico de Procesos (CEP) están enfocadas principalmente en cartas de control para procesos con variables continuas, es de interés ampliar el número de herramientas que permitan analizar procesos con variables discretas, de esta manera, para las cartas de control propuestas en el Capítulo 3, se propone como trabajo futuro lo siguiente:

- Profundizar el diseño de cartas de control para procesos con variables multinomiales con tamaños de muestra variable, pues es común encontrar procesos cuya naturaleza no permite obtener tamaños de muestra constante.
- Estudiar el desempeño de cartas de control empleando otras aproximaciones de la distribución chi cuadrado a la normal, tal como la raíz cúbica o la aproximación Peizer - Pratt.
- Diseñar cartas de control para procesos con variables multinomiales con más de 10 categorías.
- Diseñar índices de capacidad que permitan “analizar la variabilidad respecto de los requerimientos o especificaciones del producto” (Montgomery, 1995, pp. 350) o servicio y poder reducirla desde la mejora y/o rediseño del proceso.
- Abordar el diseño de cartas de control para múltiples variables multinomiales.
- Comparar el funcionamiento de la carta multinomial con cartas de control marginales.
- Estudiar el efecto de tamaños muestrales pequeños en el rendimiento de la carta y hacer las modificaciones adecuadas a situaciones como ésta, por ejemplo, el uso de cartas que acumulen datos para alcanzar el tamaño de la muestra requerido.
- Diseñar cartas de control alternativas usando transformaciones de las proporciones, tales como cartas logit.
- Plantear el uso de estas cartas de control en procesos diferentes a los asociados con manufactura y producción.

A. Anexo: Código en R para las simulaciones de las cartas de control propuestas bajo control

```

repet=50000 ### número de repeticiones a realizar
Matriz_resumen=matrix(nrow=repet,ncol=6) ### matriz donde se almacenarán resultados
colnames(Matriz_resumen)=c("Re", "npr", "Re", "npr", "Re", "npr")
p1=0.80 ### proporción categoría 1 nominal
p2=0.06 ### proporción categoría 2 nominal
p3=0.06 ### proporción categoría 3 nominal
p4=0.08 ### proporción categoría 4 nominal
vpi=c(p1,p2,p3,p4) ### vector de proporciones nominal
n=905 ### tamaño de muestra de la variable multinomial
M=300 ### número de muestras que se generarán cada vez que se realice la simulación
valor_prueba=0.01 ### valor de significancia para la prueba de hipótesis

### Cartas de control utilizando valor p
for (i in 1:repet) ### este ciclo entrega la matriz con el número de rechazos y número de muestras
antes del primer rechazo para cada una de las corridas
{
  npr=M ### almacena el número de muestras hasta que rechazar por primera vez la prueba de homogeneidad
  en cada repetición
  Re=0 ### almacena el número de rechazos en cada repetición
  N=matrix(rmultinom(M,n,vpi),nrow=M,ncol=4,byrow=TRUE) ### matriz que almacena las muestras multinomiales
  generadas en cada simulación
  mi.pvalue=function(N,vpi)chisq.test(N,p=vpi)$p.value ### función que trae el valor p de la prueba de hipótesis
  resultado_p=apply(N,1,mi.pvalue,vpi) ### matriz que almacena los valores p de la prueba de hipótesis
  npr=which(resultado_p<valor_prueba)[1] ### número de muestras hasta que ocurre el primer rechazo
  Re=length(which(resultado_p<valor_prueba)) ### número de rechazos
  Matriz_resumen[i,1]=Re ### almacena el número de rechazos en cada repetición
  Matriz_resumen[i,2]=npr ### almacena el número de muestras hasta que ocurre el primer rechazo en cada repetición
}

### Cartas de control utilizando transformación chi-cuadrado al valor p
for (i in 1:repet)
{
  npr=M
  Re=0
  N=matrix(rmultinom(M,n,vpi),nrow=M,ncol=4,byrow=TRUE)
  resultado=apply(N,1,chisq.test,p=vpi)
  mi.pvalue=function(N,vpi)chisq.test(N,p=vpi)$p.value
  resultado_chi=-2*log(apply(N,1,mi.pvalue,vpi)) ### transforma los valores p en valores chi cuadrado
  npr=which(resultado_chi>qchisq((1-valor_prueba),2))[1]
  Re=length(which(resultado_chi>qchisq((1-valor_prueba),2)))
  Matriz_resumen[i,3]=Re
  Matriz_resumen[i,4]=npr
}

### Cartas de control utilizando transformación Wilson-Hilferty para variables chi-cuadrado
for (i in 1:repet)
{
  npr=M
  Re=0
  N=matrix(rmultinom(M,n,vpi),nrow=M,ncol=4,byrow=TRUE)
  resultado=apply(N,1,chisq.test,p=vpi)
  mi.pvalue=function(N,vpi)chisq.test(N,p=vpi)$p.value
  resultado_chi=-2*log(apply(N,1,mi.pvalue,vpi))
  resultado_wh=(resultado_chi/2)^(1/3) ### transforma los valores chi cuadrado en valores normales
  lci=mean(resultado_wh)-2.58*(sqrt((1/9)*(2/2))) ### límite de control inferior normal
  lcs=mean(resultado_wh)+2.58*(sqrt((1/9)*(2/2))) ### límite de control superior normal
  npr=which(resultado_wh>lcs|resultado_wh<=lci)[1]
  Re=length(which(resultado_wh>=lcs|resultado_wh<=lci))
  Matriz_resumen[i,5]=Re

```

```

Matriz_resumen[i,6]=npr
}

par(mfcol=c(3,2))
hist(Matriz_resumen[,1],main=NULL,xlab="(A) Número de rechazos",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,3],main=NULL,xlab="(C) Número de rechazo",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,5],main=NULL,xlab="(E) Número de rechazos",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,2],main=NULL,xlab="(B) Número de muestras antes del primer rechazo",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,4],main=NULL,xlab="(D) Número de muestras antes del primer rechazo",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,6],main=NULL,xlab="(F) Número de muestras antes del primer rechazo",ylab="Frecuencia")

### Curva de operación para carta de control usando valor-p con base en la distancia de Hellinger
### Las curvas de operación para las otras cartas de control se obtienen modificando los límites de control

vp1=0.8
vp2=(1-vp1)*0.3
vp3=(1-vp1)*0.3
vp4=(1-vp1)*0.4
p1=c(vp1,vp2,vp3,vp4) ### vector de proporciones nominal
ch=0.01 ### fracción de cambio para calcular la distancia de Hellinger
Resultado1=matrix(ncol=2,nrow=20) ### matriz para almacenar la probabilidad de no detectar cambios
colnames(Resultado1)=c("DH","Probabilidad")

for (j in 1:20) ### ciclo para calcular la probabilidad de no detectar cambios para diferentes distancias
{
  repet=50000
  Matriz_resumen=matrix(0,nrow=repet,ncol=1) ### matriz temporal para almacenar número de rechazos
  colnames(Matriz_resumen)=c("Rechazos")
  vpi=p1 ### vector de probabilidades de cada categoría
  n=905 ### tamaño de muestra de la variable multinomial
  valor_prueba=0.01

  vpm1=vp1*(1-ch)
  vpm2=(1-(vp1*(1-ch)))*0.3
  vpm3=(1-(vp1*(1-ch)))*0.3
  vpm4=(1-(vp1*(1-ch)))*0.4

  p2=c(vpm1,vpm2,vpm3,vpm4) ### vector de probabilidades de cada categoría modificado
  for (i in 1:repet)
  {
    N=matrix(ncol=4,nrow=2)
    N[,1]=rmultinom(1,n,p1)
    N[,2]=rmultinom(1,n,p2)
    resultado_p=chisq.test(N,p=p1)$p.value
    if (resultado_p>valor_prueba)
    {
      Matriz_resumen[i,1]=1
    }
  }
  ch=ch+0.005
  dh=function(p1,p2)sum((p1^(0.5)-p2^(0.5))^(2)*p1) ### distancia de Hellinger
  Resultado1[j,1]=dh(p1,p2)
  Resultado1[j,2]=sum(Matriz_resumen[,1])/repet
}
plot(Resultado1,type="l",xlab="Distancia de Hellinger")

```

B. Anexo: Código en R para las simulaciones de las cartas de control propuestas fuera de control


```

### Cartas de control con incremento en 2% en la primera categoría
### Para los cambios de 4% y 6%, solo es necesario modificar las proporciones del vector de proporciones
modificado

repet=50000
Matriz_resumen=matrix(nrow=repet,ncol=6)
colnames(Matriz_resumen)=c("Re", "ncc","Re", "ncc","Re", "ncc")
p1=0.80 ###proporción categoría 1 nominal
p2=0.06 ###proporción categoría 2 nominal
p3=0.06 ###proporción categoría 3 nominal
p4=0.08 ###proporción categoría 4 nominal
vpi=c(p1,p2,p3,p4) ### vector de probabilidades de cada categoría
n=905 ###tamaño de muestra de la variable multinomial
M=300 ###número de muestras que se generarán cada vez que se realice la simulación
valor_prueba=0.01

#####
###ENSAYOS CON CAMBIO EN 2%

p1m=0.816 ###proporción categoría 1 modificada
p2m=0.0552 ###proporción categoría 2 modificada
p3m=0.0552 ###proporción categoría 3 modificada
p4m=0.0736 ###proporción categoría 4 modificada

vpim=c(p1m,p2m,p3m,p4m) ### vector de probabilidades de cada categoría modificado

### CARTA DE CONTROL VALOR-P
for (i in 1:repet) ### este ciclo entrega la matriz con el número de rechazos, porcentaje
de rechazos y número de muestras antes del primer rechazo para cada una de las muestras simuladas
{
ncc=M ###almacena el número de muestras antes de rechazar por primera vez la prueba de
homogenidad en cada simulación
Re=0 ###almacena el número de rechazos en cada simulación
N=matrix(rmultinom(M,n,vpim),nrow=M,ncol=4,byrow=TRUE) ### matriz que almacena las muestras
multinomiales generadas en cada simulación con vector modificado
mi.pvalue=function(N,vpi)chisq.test(N,p=vpi)$p.value
resultado_p=apply(N,1,mi.pvalue,vpi)
ncc=which(resultado_p<valor_prueba)[1]
Re=length(which(resultado_p<valor_prueba))
Matriz_resumen[i,1]=Re
Matriz_resumen[i,2]=ncc
}

### CARTA DE CONTROL CHI CUADRADO
for (i in 1:repet) ### este ciclo entrega la matriz con el número de rechazos, porcentaje de rechazos
y número de muestras antes del primer rechazo para cada una de las muestras simuladas
{
ncc=M ###almacena el número de muestras antes de rechazar por primera vez la prueba de homogenidad
en cada simulación
Re=0 ###almacena el número de rechazos en cada simulación
N=matrix(rmultinom(M,n,vpim),nrow=M,ncol=4,byrow=TRUE) ### matriz que almacena las muestras multinomiales
generadas en cada simulación con vector modificado
mi.pvalue=function(N,vpi)chisq.test(N,p=vpi)$p.value
resultado_chi=-2*log(apply(N,1,mi.pvalue,vpi))
ncc=which(resultado_chi>qchisq((1-valor_prueba),2))[1]
Re=length(which(resultado_chi>qchisq((1-valor_prueba),2)))
Matriz_resumen[i,3]=Re
Matriz_resumen[i,4]=ncc
}

```

```

### CARTA DE CONTROL WILSON HILFERTY
for (i in 1:repet) ### este ciclo entrega la matriz con el número de rechazos, porcentaje de rechazos y
número de muestras antes del primer rechazo para cada una de las muestras simuladas
{
ncc=M ###almacena el número de muestras antes de rechazar por primera vez la prueba de homogenidad en
cada simulación
Re=0 ###almacena el número de rechazos en cada simulación
N=matrix(rmultinom(M,n,vpim),nrow=M,ncol=4,byrow=TRUE) ### matriz que almacena las muestras multinomiales
generadas en cada simulación con vector modificado
mi.pvalue=function(N,vpi)chisq.test(N,p=vpi)$p.value
resultado_chi=-2*log(apply(N,1,mi.pvalue,vpi))
resultado_wh=as.matrix((resultado_chi/2)^(1/3))
lci=(8/9)-2.58*(sqrt((1/9)*(2/2)))
lcs=(8/9)+2.58*(sqrt((1/9)*(2/2)))
ncc=which(resultado_wh>lcs|resultado_wh<=lci)[1]
Re=length(which(resultado_wh>=lcs|resultado_wh<=lci))
Matriz_resumen[i,5]=Re
Matriz_resumen[i,6]=ncc
}

par(mfcol=c(3,2))
hist(Matriz_resumen[,1],main=NULL,xlab="(A) Número de rechazos",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,3],main=NULL,xlab="(C) Número de rechazo",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,5],main=NULL,xlab="(E) Número de rechazos",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,2],main=NULL,xlab="(B) Número de muestras antes del primer rechazo",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,4],main=NULL,xlab="(D) Número de muestras antes del primer rechazo",ylab="Frecuencia")
hist(Matriz_resumen[,6],main=NULL,xlab="(F) Número de muestras antes del primer rechazo",ylab="Frecuencia")

### Extensiones a las cartas de control propuestas
#####
### Carta de control utilizando valor p y marginales binomiales
library(qcc)
library(MASS)
p1=0.80 ###proporción categoría 1 nominal
p2=0.06 ###proporción categoría 2 nominal
p3=0.06 ###proporción categoría 3 nominal
p4=0.08 ###proporción categoría 4 nominal

vpi=c(p1,p2,p3,p4) ### vector de probabilidades de cada categoría
k=length(vpi) ###número de categorías
n=905 ###tamaño de muestra de la variable multinomial
M=300 ###número de muestras que se generarán cada vez que se realice la simulación
valor_prueba=0.01

p1m=0.816 ###proporción categoría 1 modificada
p2m=0.0552 ###proporción categoría 2 modificada
p3m=0.0552 ###proporción categoría 3 modificada
p4m=0.0736 ###proporción categoría 4 modificada
vpim=c(p1m,p2m,p3m,p4m) ### vector de probabilidades de cada categoría modificado

ncc=M ###almacena el número de muestras antes de rechazar por primera vez la prueba de homogenidad
en cada simulación
Re=0 ###almacena el número de rechazos en cada simulación
N1=matrix(rmultinom(M/2,n,vpi),nrow=M/2,ncol=4,byrow=TRUE) ### matriz que almacena las muestras
multinomiales generadas en cada simulación
N2=matrix(rmultinom(M/2,n,vpim),nrow=M/2,ncol=4,byrow=TRUE) ### matriz que almacena las muestras
multinomiales generadas en cada simulación con vector modificado
N=rbind(N1,N2)
mi.pvalue=function(N,vpi)chisq.test(N,p=vpi)$p.value ### función que toma el valor-p de la prueba
chi cuadrado de igualdad de proporciones

```

```

resultado_p=apply(N,1,mi.pvalue,vpi)
resultado_p=as.matrix(resultado_p,ncol=1)
plot(resultado_p,type="l",main="Carta de Control Multinomial - valor-p",ylab="valor-p",xlab="Muestra")
lines(rep(0.01,M),type="l")
ncc=which(resultado_p<valor_prueba)
Re=length(which(resultado_p<valor_prueba))

###Carta univariada para p1(binomial)
fi=qf(1-(valor_prueba/(2*k)),2*(n*p1),2*(n-(n*p1)+k-1),lower.tail=F)
fs=qf((valor_prueba/(2*k)),2*((n*p1)+k-1),2*(n-(n*p1)),lower.tail=F)
LI=1/(1+((n-(n*p1)+k-1)/((n*p1)*fi)))
LS=1/(1+((n-(n*p1))/((n*p1)+k-1)*fs)))
limites_bj=c(LI,LS)
datos_parcial=matrix(nrow=M,ncol=2)
datos_parcial[,1]=N[,1]
datos_parcial[,2]=N[,2]+N[,3]+N[,4]
carta1=qcc(datos_parcial[,1],type="p",confidence.level=0.99,sizes=n,limits=limites_bj,center=p1,
title="Carta de control binomial para Categoría 1",add.stats=FALSE,xlab="Muestra",ylab="Proporción")

###Carta univariada para p2(binomial)
fi=qf(1-(valor_prueba/(2*k)),2*(n*p2),2*(n-(n*p2)+k-1),lower.tail=F)
fs=qf((valor_prueba/(2*k)),2*((n*p2)+k-1),2*(n-(n*p2)),lower.tail=F)
LI=1/(1+((n-(n*p2)+k-1)/((n*p2)*fi)))
LS=1/(1+((n-(n*p2))/((n*p2)+k-1)*fs)))
limites_bj=c(LI,LS)
datos_parcial=matrix(nrow=M,ncol=2)
datos_parcial[,1]=N[,2]
datos_parcial[,2]=N[,1]+N[,3]+N[,4]
carta=qcc(datos_parcial[,1],type="p",confidence.level=0.99,sizes=n,limits=limites_bj,center=p2,
title="Carta de control binomial para Categoría 2",add.stats=FALSE,xlab="Muestra",ylab="Proporción")

###Carta univariada para p3(binomial)
fi=qf(1-(valor_prueba/(2*k)),2*(n*p3),2*(n-(n*p3)+k-1),lower.tail=F)
fs=qf((valor_prueba/(2*k)),2*((n*p3)+k-1),2*(n-(n*p3)),lower.tail=F)
LI=1/(1+((n-(n*p3)+k-1)/((n*p3)*fi)))
LS=1/(1+((n-(n*p3))/((n*p3)+k-1)*fs)))
limites_bj=c(LI,LS)
datos_parcial=matrix(nrow=M,ncol=2)
datos_parcial[,1]=N[,3]
datos_parcial[,2]=N[,1]+N[,2]+N[,4]
carta3=qcc(datos_parcial[,1],type="p",confidence.level=0.99,sizes=n,limits=limites_bj,center=p3,
title="Carta de control binomial para Categoría 3",add.stats=FALSE,xlab="Muestra",ylab="Proporción")

###Carta univariada para p4(binomial)
fi=qf(1-(valor_prueba/(2*k)),2*(n*p4),2*(n-(n*p4)+k-1),lower.tail=F)
fs=qf((valor_prueba/(2*k)),2*((n*p4)+k-1),2*(n-(n*p4)),lower.tail=F)
LI=1/(1+((n-(n*p4)+k-1)/((n*p4)*fi)))
LS=1/(1+((n-(n*p4))/((n*p4)+k-1)*fs)))
limites_bj=c(LI,LS)
datos_parcial=matrix(nrow=M,ncol=2)
datos_parcial[,1]=N[,4]
datos_parcial[,2]=N[,1]+N[,2]+N[,3]
carta4=qcc(datos_parcial[,1],type="p",confidence.level=0.99,sizes=n,limits=limites_bj,center=p4,
title="Carta de control binomial para Categoría 4",add.stats=FALSE,xlab="Muestra",ylab="Proporción")

#####
### Carta de control utilizando valor p y auxiliar con muestras agrupadas c=30
p1=0.80
p2=0.06
p3=0.06
p4=0.08

```

```

n=905
M=300
vpi=c(p1,p2,p3,p4)
valor_prueba=0.01
p1m=0.84
p2m=0.048
p3m=0.048
p4m=0.064
vpim=c(p1m,p2m,p3m,p4m)
c=30 ###número de de muestras agrupadas
MG=M-c+1 ###número de muestras a graficar en la carta de control auxiliar
carta_auxiliar=matrix(ncol=1,nrow=MG)### matriz auxiliar donde se almacenan los datos de la carta auxiliar
muestra_agrupada=matrix(ncol=1,nrow=c)### matriz que almacena temporalmente la cantidad agrupada de valores-p a
comparar con el valor de prueba
ncc=M
Re=0
N1=matrix(rmultinom(M/2,n,vpi),nrow=M/2,ncol=4,byrow=TRUE)
N2=matrix(rmultinom(M/2,n,vpim),nrow=M/2,ncol=4,byrow=TRUE)
N=rbind(N1,N2)

mi.pvalue=function(N,vpi)chisq.test(N,p=vpi)$p.value
resultado_p=as.matrix(apply(N,1,mi.pvalue,vpi))
for (j in 1:MG)### este ciclo cuenta el número de rechazos en la muestra agrupada y registra el valor en la
matriz carta_auxiliar
{
h=0
for (k in 1:c)
{
muestra_agrupada[k,1]=resultado_p[j+h,1]
h=h+1
}
carta_auxiliar[j,1]=length(which(muestra_agrupada<valor_prueba))
}
numero_muestras=length(carta_auxiliar)
ncc=which(carta_auxiliar>(valor_prueba*c))[1]
Re=length(which(carta_auxiliar>(valor_prueba*c)))

par(mfcol=c(1,2))
plot(resultado_p,main="Carta de control con valores p",type="l",xlab="Muestra",ylab="Valor-p")
lines(rep(valor_prueba,300),type="l")
plot(carta_auxiliar,main="Carta de control auxiliar",type="l",xlab="Muestra",ylab="Cantidad de rechazos")
lines(rep(valor_prueba*30,MG),type="l")

```

C. Anexo: Código en R para elaborar curvas de operación

```
#####
### C0 para carta usando valor-p
vp1=0.9
vp2=(1-vp1)*0.5
vp3=(1-vp1)*0.5
p1=c(vp1,vp2,vp3)
ch=0.01
Resultado1=matrix(ncol=2,nrow=20)
colnames(Resultado1)=c("Porcentaje de cambio","Probabilidad")

for (j in 1:20)
{
  repet=50000
  Matriz_resumen=matrix(0,nrow=repet,ncol=1)
  colnames(Matriz_resumen)=c("Bajo control")
  vpi=p1 ### vector de probabilidades de cada categoría
  n=905 ###tamaño de muestra de la variable multinomial
  valor_prueba=0.01

  vpm1=vp1*(1-ch)
  vpm2=(1-(vp1*(1-ch)))*0.5
  vpm3=(1-(vp1*(1-ch)))*0.5

  p2=c(vpm1,vpm2,vpm3) ### vector de probabilidades de cada categoría modificado
  for (i in 1:repet) ### este ciclo entrega la matriz con el número de rechazos, porcentaje de rechazos
  y número de muestras antes del primer rechazo para cada una de las muestras simuladas
  {
    N=matrix(ncol=3,nrow=2)
    N[1,]=rmultinom(1,n,p1)
    N[2,]=rmultinom(1,n,p2)
    resultado_p=chisq.test(N,p=p1)$p.value
    if (resultado_p>valor_prueba)
    {
      Matriz_resumen[i,1]=1
    }
  }
  ch=ch+0.005
  dh=function(p1,p2)sum((p1^(0.5)-p2^(0.5))^(2)*p1)
  Resultado1[j,1]=dh(p1,p2)
  Resultado1[j,2]=sum(Matriz_resumen[,1])/repet
}
Resultado1

### C0 para carta usando transformación chi cuadrado del valor-p
for (j in 1:20)
{
  repet=50000
  Matriz_resumen=matrix(0,nrow=repet,ncol=1)
  colnames(Matriz_resumen)=c("Bajo control")
  vpi=p1 ### vector de probabilidades de cada categoría
  n=905 ###tamaño de muestra de la variable multinomial
  M=300 ###número de muestras que se generarán cada vez que se realice la simulación
  valor_prueba=0.01
  vpm1=vp1*(1-ch)
  vpm2=(1-(vp1*(1-ch)))*0.5
  vpm3=(1-(vp1*(1-ch)))*0.5
  p2=c(vpm1,vpm2,vpm3) ### vector de probabilidades de cada categoría modificado
  for (i in 1:repet) ### este ciclo entrega la matriz con el número de rechazos, porcentaje de rechazos
  y número de muestras antes del primer rechazo para cada una de las muestras simuladas
  {
```

```

N=matrix(ncol=3,nrow=2)
N[1,]=rmultinom(1,n,p1)
N[2,]=rmultinom(1,n,p2)
resultado_p=chisq.test(N,p=p1)$p.value
resultado_chi=-2*log(resultado_p)
if (resultado_chi<qchisq((1-valor_prueba),2))
{
Matriz_resumen[i,1]=1
}
}
Resultado2[j,1]=ch*100
ch=ch+0.005
dh=function(p1,p2)sum((p1^(0.5)-p2^(0.5))^(2)*p1)
Resultado2[j,2]=sum(Matriz_resumen[,1])/repet
}
Resultado2

### C0 para carta usando valor WH
for (j in 1:20)
{
repet=50000
Matriz_resumen=matrix(0,nrow=repet,ncol=1)
colnames(Matriz_resumen)=c("Bajo control")
vp1=p1 ### vector de probabilidades de cada categoría
n=905 ###tamaño de muestra de la variable multinomial
M=300 ###número de muestras que se generarán cada vez que se realice la simulación
valor_prueba=0.01
vp1=vp1*(1-ch)
vp2=(1-(vp1*(1-ch)))*0.5
vp3=(1-(vp1*(1-ch)))*0.5
p2=c(vp1,vp2,vp3) ### vector de probabilidades de cada categoría modificado
for (i in 1:repet) ### este ciclo entrega la matriz con el número de rechazos, porcentaje de rechazos
y número de muestras antes del primer rechazo para cada una de las muestras simuladas
{
N=matrix(ncol=3,nrow=2)
N[1,]=rmultinom(1,n,p1)
N[2,]=rmultinom(1,n,p2)
resultado_p=chisq.test(N,p=p1)$p.value
resultado_chi=-2*log(resultado_p)
resultado_wh=(resultado_chi/2)^(1/3)
lci=(8/9)-2.58*(sqrt(1/9))
lcs=(8/9)+2.58*(sqrt(1/9))
if (resultado_wh<=lcs & resultado_wh>=lci)
{
Matriz_resumen[i,1]=1
}
}
Resultado3[j,1]=ch*100
ch=ch+0.005
dh=function(p1,p2)sum((p1^(0.5)-p2^(0.5))^(2)*p1)
Resultado3[j,2]=sum(Matriz_resumen[,1])/repet
}
Resultado3

plot(Resultado1,type="p",xlab="Porcentaje de cambio en la primera categoría",col="blue",pch=15)
lines(Resultado2,type="l",pch=16)
lines(Resultado3,type="b",col="red",pch=17)
legend("bottomleft",c("Propuesta 1","Propuesta 2","Propuesta 3"),pch=15:17,lty=1:3,col = c("blue","black","red"))

```

Bibliografía

- [1] AEBTARM, Surath y BOUGUILA, Nizar. ‘An Optimal Bivariate Poisson Field Chart for Controlling High-Quality Manufacturing Processes’. En: *Expert Systems with Applications*. 2012, vol. 37, no. 7, p. 5498-5506.
- [2] AEBTARM, Surath y BOUGUILA, Nizar. ‘An Empirical Evaluation of Attribute Control Charts for Monitoring Defects’. En: *Expert Systems with Applications*. 2011, vol. 38, no. 6, p. 7869-7880.
- [3] AGRESTI, Alan. *Categorical Data Analysis*. 2 ed. New Jersey: Wiley - Interscience, 2002. 710 p.
- [4] AMIRZADEH, Vahid; MASHINCHIN, Mashaallah y PARCHAMI, Abbas. ‘Construction of $p - Charts$ Using Degree of Nonconformity’. En: *Information Sciences*. 2009, vol. 179, no. 1, p. 150-160.
- [5] ANGERS, Claude. ‘A Graphical Method to Evaluate Sample Sizes for the Multinomial Distribution’. En: *Technometrics*. 1974, vol. 19, no. 3, p. 469-471.
- [6] BAIN, Lee. y ENGELHARDT, Max. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Boston: PWS Publishers, 1987. 565 p.
- [7] BERGER, James. y SELLKE, Thomas. ‘Testing a Point Null Hypothesis: The Irreconcilability of P Value and Evidence’. En: *Journal of the American Statistical Association*. 1987, vol. 82, no. 397, p. 112-122.
- [8] BERSIMIS, Sotiris; PSARAKIS, Stelios y PANARETOS, John. ‘Multivariate Statistical Process Control Charts: An Overview’. En: *Quality and Reliability Engineering International*. 2007, vol. 23, no. 1, p. 517-543.
- [9] BROMAGHIN, Jeffrey. ‘Sample Size Determination for Interval Estimation of Multinomial Probabilities’. En: *The American Statistician*. 1993, vol. 47, no. 3, p. 203-206.
- [10] CALABRESE, Joel. ‘Bayesian Process Control for Attributes’. En: *Management Science*. 1995, vol. 41, no. 4, p. 637-645.
- [11] CANAL, Luisa. ‘A Normal Approximation for the Chi-square Distribution’. En: *Computational Statistics & Data Analysis*. 2005, vol. 48, no. 1, p. 803-808.

-
- [12] CAROT, Vicente. *Control Estadístico de la Calidad*, Valencia: Universidad Politécnica de Valencia, 1998.
- [13] CASELLA, George y BERGER, Roger. *Statistical Inference*. 2 ed. California: Duxbury, 2001. 660 p.
- [14] CAULCUTT, Roland. 'The Rights and Wrongs of Control Charts'. En: *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*. 1995, vol. 44, no. 3, p. 279-288.
- [15] CHARNES, John y GITLOW, Howard. 'Using Control Charts to Corroborate Bribery in Jai Alai'. En: *The American Statistician*. 1995, vol. 49, no. 4, p. 386-389.
- [16] CHIU, Jing-Er y KUO, Tsen-I. 'Attribute Control Chart for Multivariate Poisson Distribution'. En: *Communications in Statistics - Theory and Methods*. 2007, vol. 37, no. 1, p. 146-158.
- [17] CRESSIE, Noel y READ, Timothy. 'Pearson's. X^2 and Loglikelihood Ratio Statistic G^2 : A Comparative Review'. En: *International Statistical Review*. 1989, vol. 57, no. 1, p. 19-43.
- [18] DEMING, Edwards. 'Principles of Professional Statistical Practice'. En: *The Annals of Mathematical Statistics*. 1965, vol. 36, no. 6, p. 1883-1900.
- [19] DEMING, Edwards. *Calidad, Productividad y Competitividad. La Salida de la Crisis*, 1 ed. Madrid: Ediciones Díaz de Santos, 1989.
- [20] DONAHUE, Rafe. 'A Note on Information Seldom Reported via the P-Value'. En: *The American Statistician*. 1999, vol. 53, no. 4, p. 303-306.
- [21] DOOLEY, Kevin; ANDRESON, John y LIU, Xiaohe. 'Process Quality Knowledge Bases'. En: *Journal of Quality Control*. 1999, vol. 31, no. 3, p. 813-816.
- [22] DUNCAN, Acheson. *Control de Calidad y Estadística Industrial*. 5 ed. México: Alfaomega, 1989.
- [23] DURAN, Rodrigo. Tesis de Doctorado. *Monitoring and Interpreting Multistage and Multicategory Processes* Rutgers University, 2009.
- [24] FAIRBANKS, Kenneth y MADSEN, Richard. 'P Values for Test Using a Repeated Significance Test Design'. En: *Biometrika*. 1982, vol. 69, no. 1, p. 69-74.
- [25] FARNUM, Nicholas. *Modern Statistical Quality Control and Improvement*. California: Duxbury Press, 1994.
- [26] FORD, Henry. *My Life and Work*. Sydney: Cornstalk Press, 1926. 265 p.

- [27] FUCHS, C. y KENETT, R. *Multivariate Quality Control. Theory and Applications*. New York: Marcel Dekker, 1998.
- [28] GAITHER, Norman y FRAZIER, Greg. *Administración de Producción y Operaciones*. 8 ed. México D.F.: International Thomson, 2000.
- [29] GIBBS, Alison y SU, Francis. 'On Choosing and Bounding Probability Metrics'. En: *International Statistical Review*. 2002, vol. 70, no. 3, p. 419-435.
- [30] GONZALEZ, Difariney. Tesis de Maestría. *Comparación de Intervalos de Confianza para la Distribución Multinomial* Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín, 2010.
- [31] GOODMAN, Leo. 'On Simultaneous Confidence Intervals for Multinomial Proportions'. En: *Technometrics*. 1965, vol. 7, no. 2, p. 247-254.
- [32] GUTIÉRREZ, Humberto. 'Cartas de Control Bayesianas para Atributos y el Tamaño de Subgrupo Grande en la Carta p '. En: *Revista Colombiana de Estadística*. 2006, vol. 29, no. 2, p. 163-180.
- [33] GUTIÉRREZ, Humberto y GARCÍA, Juan. 'Verificación y Monitoreo de la Aleatoriedad de los Juegos de Números de d dígitos'. En: *Revista Colombiana de Estadística*. 2010, vol. 33, no. 2, p. 167-190.
- [34] GUTIÉRREZ, Humberto y DE LA VARA SALAZAR, Román. *Control Estadístico de la Calidad y Seis Sigma*. México D.F.: McGraw-Hill, 2004. 632 p.
- [35] HACKMAN, Richard y WAGEMAN, Ruth. 'Total Quality Management: Empirical, Conceptual and Practical Issues'. En: *Administrative Science Quarterly*. 1995, vol. 40, no. 2, p. 309-342.
- [36] HAHN, Gerald. 'Deming's Impact on Industrial Statistics: Some Reflections'. En: *The American Statistician*. 1995, vol. 49, no. 4, p. 336-341.
- [37] HILLMER, Steven y KARNEY, Dennis. 'Towards Understanding the Foundations of Deming's Theory of Management'. En: *Journal of Quality Management*. 1995, vol. 2, no. 2, p. 171-189.
- [38] HOGG, Robert y CRAIG, Allent. *Introduction to Mathematical Statistics*. Bogotá: Prentice Hall, X, 1995. 564 p.
- [39] HUSCHKA, Kyle. Tesis de Maestría. *Using Statistical Process Control to Monitor Inventory Accuracy* Departamento de Ingeniería Industrial y Sistemas de manufactura, Universidad Estatal de Kansas, 2009.

-
- [40] JAMES, Hung, et al. 'The Behavior of the P-Value when the Alternative Hypothesis is true'. En: *Biometrics*. 1997, vol. 53, no. 1, p. 11-22.
- [41] JOHNSON, Norman y KOTZ, Samuel. *Discrete Multivariate Distributions*. New York: Wiley - Interscience. 1996. 299 p.
- [42] JOHNSON, Richard y WICHERN, Dean. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 6 ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [43] JOLAYEMI, Joel. 'A Statistical Model for the Design of Multiattribute Control Charts'. En: *The Indian Journal of Statistics, Series B*. 1999, vol. 61, no. 2, p. 351-365.
- [44] JOLAYEMI, Joel. 'An Optimal Design of Multiattribute Control Charts for Process Subject to a Multiplicity of Assignable Causes'. En: *Applied Mathematics and Computation*. 2000, vol. 114, no. 1, p. 187-203.
- [45] JURAN, Joseph. y GRZYNA, Frank. *Juran's Quality Control Handbook*. 4 ed. New York : McGraw Hill, 1988.
- [46] KULLDORFF, Martin; GRAUBARD, Barry y VELIE, Ellen. 'The P-Value and P-Value Function'. En: *Epidemiology Resources*. 1999, vol. 10, no. 3, p. 345-347.
- [47] LANG, Janet; ROTHMAN, Kennet y CANN, Cristina. 'That Confounded P-Value'. En: *Epidemiology Resources*. 1998, vol. 9, no. 1, p. 7-8.
- [48] LAUNGRUNGRONG, Busaba. Tesis de Doctorado. *Multivariate Charts for Multivariate Poisson-Distributed Data* Arizona State University, 2010.
- [49] LAVIOLETTE, Michael. 'Bayesian monitoring of multinomial processes'. En: *The Journal of the Industrial Mathematics Society*. 1995, vol. 45, no. 1, p. 41-49.
- [50] LEEMIS, Lawrence y TRIVEDI, Kishor. 'A Comparison of Approximate Interval Estimators for the Bernoulli Parameter'. En: *The American Statistician*. 1996, vol. 50, no. 1, p. 63-68.
- [51] LEVINSON, William. *Statistical Process Control for Real World Applications*. Pensilvania: CRC Press, 2011. 239 p.
- [52] LI, Yanting y TSUNG, Fugee. 'Multiple Attribute Control Charts with False Discovery Rate Control'. En: *Quality and Reliability Engineering International*. 2012, vol. 28, no. 8, p. 857-871.
- [53] LI, Zhonghua; QIU, Peihua; CHATTERJEE, Snigdhasu y WANG, Zhaojun. 'Using P-Values to Design Statistical Process Control Charts'. En: *Statistical Papers*. 2013, vol. 54, no. 2, p. 523-539.

-
- [54] LUCAS, James. 'Counted Data CUSUM's'. En: *Technometrics*. 1985, vol. 27, no. 2, p. 129-144.
- [55] LU, X.S.; XIE, M; GOH, T.N. y LAI, C.D. 'Control Charts for Multivariate Attribute Processes'. En: *International Journal of Production Research*. 1998, vol. 36, no. 12, p. 3477-3489.
- [56] MADSEN, Richard y FAIRBANKS, Kenneth. 'P Values for Multistage and Sequential Test'. En: *Technometrics*. 1983, vol. 25, no. 3, p. 285-293.
- [57] MARCUCCI, Mark. 'Monitoring Multinomial Processes'. En: *Journal of Quality Technology*. 1985, vol. 17, no. 2, p. 86-91.
- [58] MCAREE, Paul. Tesis de Maestría. *Statistical Process Control in Medical Surveillance an Application using Spirometry*, Faculty of the School of Engineering, The Air Force Institute of Technology, 1996.
- [59] MONTGOMERY, Douglas. *Control Estadístico de la Calidad*. México D.F.: Limusa Wiley, 2005. 789 p.
- [60] NEAVE, H. 'Deming's 14 Points for Management: Framework for Success'. En: *Journal of the Royal Statistical Society. Series D*. 1987, vol. 36, no. 5, p. 561-570.
- [61] NICKERSON, Raymond. 'Null Hypothesis Significance Testing: A Review of an Old and Continuing Controversy'. En: *American Psychological Association*. 2000, vol. 5, no. 2, p. 241-301.
- [62] OSPINA, Carolina. Tesis de Maestría. *Control Multivariado de Procesos con Variables Binomiales Bivariadas* Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 2009.
- [63] OTT, Ellis; SCHILLING, Edward y NEUBAUER, Dean. *Process Quality Control. Troubleshooting and Interpretation of Data*. 3 ed. New York: McGraw-Hill, 2000. 596 p.
- [64] PARK, Yongro. Tesis de Doctorado. *A Statistical Process Control Approach for Network Intrusion Detection* School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, 2005.
- [65] PATEL, Harji. 'Quality Control Methods for Multivariate Binomial and Poisson Distribution'. En: *Technometrics*. 1973, vol. 15, no. 1, p. 103-112.
- [66] PÉREZ, César. *Control Estadístico de la Calidad. Teoría, Práctica y Aplicaciones Informáticas*. Madrid: Alfaomega, 1999.
- [67] QUESENBERRY, C. y HURTS, D. 'Large Sample Simultaneous Confidence Intervals for Multinomial Proportions'. En: *Technometrics*. 1964, vol. 6, no. 2, p. 191-195.

- [68] RAO, Radhakrishna. 'A Review of Canonical Coordinates and Alternative to Correspondence Analysis using Hellinger Distance'. En: *Qüestió*. 1995, vol. 19, no. 1, p. 23-63.
- [69] RYAN, Thomas. *Statistical Methods for Quality Improvement*. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 2000. 545 p.
- [70] RYAN, Anne; WELLS, Lee y WOODALL, William. 'Methods for Monitoring Multiple Proportions when Inspecting Continuously'. En: *Journal of Quality Technology*. 2011, vol. 43, no. 3, p. 237-248.
- [71] SHIAU, Jyh-Jen; CHEN, Chih-Rung y FELTZ, Carol. 'An Empirical Bayes Process Monitoring Technique for Polytomous Data'. En: *Quality and Reliability Engineering International*. 2005, vol. 21, no. 1, p. 13-28.
- [72] SISON, Cristina y GLAZ, Joseph. 'Simultaneous Confidence Intervals and Sample Size Determination for Multinomial Proportions'. En: *Journal of the American Statistical Association*. 1995, vol. 90, no. 429, p. 366-369.
- [73] SKINNER, Katina; RUNGER, George y MONTGOMERY, Douglas. 'Process Monitoring for Multiple Count Data Using a Deleted-Y Statistic'. En: *Quality Technology and Quantitative Management*. 2006, vol. 3, no. 3, p. 247-262.
- [74] SPANOS, Costas y CHEN, Raymond. 'Using Qualitative Observations for Process Tuning and Control'. En: *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*. 1997, vol. 10, no. 2, p. 307-316.
- [75] STAPENHURST, Tim. *Mastering Statistical Process Control. A Handbook for Performance Improvement Using Cases*. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 460 p.
- [76] TALEB, Hassen. 'Control Charts Applications for Multivariate Attribute Processes'. En: *Computers & Industrial Engineering*. 2009, vol. 56, no. 1, p. 399-410.
- [77] TALEB, Hassen, LIMAM, Mohamed y HIROTA, Kaoru. 'Multivariate Fuzzy Multinomial Control Charts'. En: *Quality Technology & Quantitative Management*. 2006, vol. 3, no. 4, p. 437-453.
- [78] THOMPSON, Bill. 'Critique of P-Values'. En: *International Statistical Review*. 2006, vol. 74, no. 1, p. 1-14.
- [79] THOMPSON, James y KORONACKI, Jacek. *Statistical Process Control. The Deming Paradigm and Beyond*. 2 ed. Florida: Chapman & Hall/CRC, 2002. 447 p.

-
- [80] THOMPSON, Steven. 'Sample Size for Estimating Multinomial Proportions'. En: *The American Statistician*. 1987, vol. 41, no. 1, p. 42-46.
- [81] TOPALIDOU, Elisabeth y PSARAKIS, Stelios. 'Review of Multinomial and Multiattribute Quality Control Charts'. En: *Quality and Reliability Engineering International*. 2009, vol. 25, no. 7, p. 773-804.
- [82] TORTORA, Robert. 'A Note on Sample Size Estimation for Multinomial Populations'. En: *The American Statistician*. 1978, vol. 32, no. 3, p. 100-102.
- [83] TSEKOURAS, George, et al. 'A Fuzzy Logic Approach for the Classification of Product Qualitative Characteristics'. En: *Computers and Chemical Engineering*. 2002, vol. 26, no. 1, p. 429-438.
- [84] UMUT, Kamil. Tesis de Maestría. *Application of Statistical Process Control to Software Development Processes Via Control Charts*. Departamento de Sistemas de Información, The Middle East Technical University, 2003.
- [85] WALTON, Mary. *El Método Deming en la Práctica*. Bogotá: Norma, 1992
- [86] WILSON, Edwin y HILFERTY, Margaret. 'The Distribution of Chi-square'. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 1931, vol. 17, no. 12, p. 684-688.
- [87] WOODALL, William. 'Controversies and Contradictions in Statistical Process Control'. En: *Journal of Quality Technology*. 2000, vol. 32, no. 4, p. 341-350.
- [88] WOODALL, William; TSUI, K.L. y TUCKER, G.R. *A Review of Statistical and Fuzzy Quality Control Charts Based on Categorical Data*. En: *Frontiers in Statistical Quality Control 5*. Berlin: Physica-Verlag HD, 1997. 291 p.
- [89] WRIGHT, Paul. 'Adjusted P-Values for Simultaneous Inference'. En: *Biometrics*. 1992, vol. 48, no. 4, p. 1005-1013.
- [90] XIE, M; GOH, T.N. y RANJAN, P. 'Some Effective Control Chart Procedures for Reliability Monitoring'. En: *Reliability Engineering System Safety*. 2002, vol. 77, no. 1, p. 143-150.
- [91] YACOUT, S. y CHANG, Y. 'Using Control Charts for Parameter Estimation of a Homogeneous Poisson Process'. En: *Computers & Industrial Engineering*. 1997, vol. 31, no. 1, p. 269-271.
- [92] YÁÑEZ, Sergio, GONZÁLEZ, Nelfi y VARGAS, José. *Cartas de Control T^2 Multivariadas Usando R y SAS*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2011.

- [93] YOUNG, Mark. 'A Framework for Successful Adoption and Performance of Japanese Manufacturing Practices in the United States'. En: *The Academy of Management Review*. 1992, vol. 17, no. 4, p. 677-700.
- [94] ZHANG, Zhihai. Tesis de Doctorado. *Implementation of Total Quality Management: An Empirical Study of Chinese Manufacturing Firms*. Netherlands: University of Groningen, 2001.